

Semaine n°20 du 11 au 16 mars 2024

Les entiers naturels

- Multiples et diviseurs d'un entier naturel. Théorème de la division euclidienne dans \mathbb{N} .
- Notions de PGCD-PPCM de deux entiers naturels.
- Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers.

Ensembles-Dénombrement

- Appartenance, inclusion. Sous-ensembles (parties) d'un ensemble. Intersection, réunion, complémentaire. Propriétés. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E .
- Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E . Lien avec intersection, réunion, complémentaire.
- Rappels sur injection, surjection, bijection.
- Cardinal d'un ensemble fini. Caractérisations de la bijectivité d'une application entre deux ensembles de même cardinal. Opérations sur les cardinaux. Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis A et B . Notation $\mathcal{F}(A, B) = B^A$. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini. Le cardinal de E^p est $\text{card}(E)^p$ (= nombre de p -listes de E).
- Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n (p -arrangements) ($A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$, 0 sinon). Nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis. Nombre de permutations (bijections de E vers E) d'un ensemble fini E ($n!$ si $\text{card}(E) = n$).
- Nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n (p -combinaisons) ($\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ si $0 \leq p \leq n$, 0 sinon). Rappels des propriétés des coefficients binomiaux. Formule du binôme.

Les polynômes

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) : somme, produit, composée de polynômes. Degré d'une somme, d'un produit. Coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$. Fonction polynomiale associée.
- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Théorème de la division euclidienne.
- Racines (zéros) d'un polynôme. Caractérisation. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par le degré. Multiplicité d'une racine. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (i.e si $\deg(P) \leq n$) et si P possède au moins $n + 1$ racines distinctes, alors $P = \tilde{0}$. Notion de polynôme scindé sur \mathbb{K} .
- Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.
- Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
- Notion de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$: catalogue dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$. Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- Dérivation formelle d'un polynôme. Linéarité, dérivation d'un produit, dérivée $k^{\text{ième}}$. Formule de Taylor pour les polynômes. Caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées successives.

Exercices

Exercice 1 Preuve de l'**existence** du quotient et du reste dans la division euclidienne dans \mathbb{N} .

Exercice 2 Preuve de l'**unicité** du quotient et du reste dans la division euclidienne dans \mathbb{N} .

Exercice 3 Soit a et b , des entiers vérifiant $0 \leq b < a$.

Comparer les restes et les quotients des divisions euclidiennes de a et b par $a - b$.

Exercice 4 Pour n et p dans \mathbb{N} , on pose $u_{n,p} = \frac{(2n)!(2p)!}{n!p!(n+p)!}$.

- Vérifier $u_{n+1,p} + u_{n,p+1} = 4u_{n,p}$: en déduire que $u_{n,p}$ est un entier pour tout n et pour tout p dans \mathbb{N} (indication : on pourra raisonner par récurrence sur n en étudiant la proposition $H(n)$: «pour tout entier $p \geq 0$, $u_{n,p}$ est un entier»).
- En déduire que $\binom{n+p}{n}$ divise $\binom{2n}{n} \times \binom{2p}{p}$.

Exercice 5 Sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E non vide, on définit la différence symétrique de deux ensembles A et B par : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- Vérifier : $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.
- Exprimer la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{A \Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
- Prouver, pour A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Exercice 6 Soit E , un ensemble de cardinal $n \geq 1$. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \subset B$.

Exercice 7 Quel est le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés, avec $n \geq 3$ (trois méthodes, au choix) ?

Exercice 8 Quel est le nombre d'anagrammes du mot «galois» ? Du mot «lipschitzienne» ?

Exercice 9 **Unicité** du quotient et du reste dans la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme B non nul (dans $\mathbb{K}[X]$).

Exercice 10 Les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ périodiques sont exactement les polynômes constants.

Exercice 11 Calculer, pour tout entier $n \geq 2$, les restes dans la division euclidienne du polynôme $A_n = (X-3)^{2n} - (X-2)^n + 2$ par $B_1 = (X-3)(X-2)$ puis par $B_2 = (X-2)^2$.

Exercice 12 Factoriser, sur $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 13 On définit la famille de polynômes (de Tchebychev) $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et, pour tout } n \geq 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

- Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$: montrer qu'il y a unicité d'un polynôme P tel que
pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
- Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, pour tout réel θ , $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
On rappelle la formule de trigonométrie : $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
Ainsi on a prouvé que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a **existence** et **unicité** d'un polynôme P vérifiant l'égalité $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: ce polynôme est T_n , le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev.

n	0	1	2	3	4	5	6
$T_n(X)$	1	X	$2X^2 - 1$	$4X^3 - 3X$	$8X^4 - 8X^2 + 1$	$16X^5 - 20X^3 + 5X$	$32X^6 - 48X^4 + 18X^2 - 1$

Exemple : $\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

De même : $\cos(6\theta) = T_6(\cos(\theta)) = 32\cos^6(\theta) - 48\cos^4(\theta) + 18\cos^2(\theta) - 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.