# Semaine n°22 du 25 au 30 mars 2024

**Les polynômes**

- Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à **pôles simples**.

**Les espaces vectoriels**

- Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-ev.
- Si $\Omega$ est un ensemble quelconque (non vide), $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^\Omega$, ensemble des applications de $\Omega$ vers $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-ev. Exemple : $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-ev.
- Notion de sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev : c'est aussi un $\mathbb{K}$-ev. Caractérisation (partie de $E$ qui contient le vecteur nul de $E$ et est stable par combinaison linéaire). Exemples.
- Sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs (ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille). Notation $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$.
- L'intersection d'une famille de sous-espaces de $E$ est un sous-espace de $E$.

**Somme de sous-espaces**

- Somme de deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$. Notation $F + G$. C'est un sous-espace de $E$.
- $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) + \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$.
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ (lorsque la décomposition de tout vecteur de $F+G$ est unique). Notation : $F \oplus G$. Caractérisation par l'intersection de ces deux sous-espaces réduite au vecteur nul.
- Sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel. Exemples : $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathbb{R}^\mathbb{R}$.
- Si $F$ et $G$ sont deux sous espaces supplémentaires d'un espace $E$, définition du projecteur (projection vectorielle) $p$ sur $F$ (*base*) parallèlement à (ou selon) $G$ (*direction*). Projecteur associé $q = \mathrm{Id}_E - p$.
- Un **hyperplan** de $E$ est un sev de $E$ qui admet une droite vectorielle comme supplémentaire dans $E$. Dans ce cas, pour tout vecteur $\vec{b} \notin H$, on a $H \oplus \mathrm{Vect}(\vec{b}) = E$.

**Exercices**

**Exercice 1** Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fraction $F(X) = \dfrac{1}{X^n - 1}$ (où $n \geqslant 2$).

**Exercice 2** L'ensemble $\mathcal{B}$ des suites réelles bornées est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exercice 3** L'ensemble $\mathcal{L}$ des fonctions lipschitziennes sur $I$, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **lipschitzienne** s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $f$ est $C$-lipschitzienne (i.e) pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$. Ainsi :

$$(f \in \mathcal{L}) \Leftrightarrow (\exists C_f \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant C_f|x - y|).$$

**Exercice 4** Soit $A$ et $B$, deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev $E$. On a l'équivalence suivante :

$$(A \cup B \text{ est un sev de } E) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ ou } B \subset A).$$

**Exercice 5** Montrer que $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ est un plan vectoriel.

**Exercice 6** Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $H = \{(x, y, z) \in E \mid x - y + 2z = 0\}$ et $\Delta = \mathrm{vect}(\vec{a})$ avec $\vec{a} = (1, 1, 1)$. Montrer : $H \oplus \Delta = E$ et donner une expression de $p(\vec{v})$, projeté du vecteur $\vec{v}$ sur $H$ dans la direction $\Delta$.

**Exercice 7** Soit $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$), ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ce sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 8** Soit $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{I}$) l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont paires (respectivement impaires). Ce sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

**Exercice 9** Soit l'espace $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit $H = \{f \in E \mid \displaystyle\int_0^\pi f = \int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(\sin)$. Montrer que $H$ et $D$ sont des sous-espaces supplémentaires de $E$. Justifier $H \oplus \mathrm{Vect}(\exp) = E$.
On note $p$, le projecteur sur $H$ selon la direction $D$ : préciser $p(\cos)$, $p(\sin)$, $p(\tilde{1})$.