Semaine n°23 du 02 avril au 06 avril 2024

Somme de sous-espaces

- Somme de deux sous-espaces vectoriels F et G. Notation $F+G$. Propriété : c'est un sous-espace.
- $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p)+\mathrm{Vect}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)=\mathrm{Vect}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$.
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G (lorsque la décomposition de tout vecteur de $F+G$ est unique). Notation : $F\oplus G$. Caractérisation par l'intersection de ces deux sous-espaces réduite au vecteur nul.
- Sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel. Exemples : $\mathcal{S}_n\oplus\mathcal{A}_n=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}\oplus\mathcal{I}=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Si F et G sont deux sous espaces supplémentaires d'un espace E, définition du projecteur (projection vectorielle) p sur F (*base*) parallèlement à (ou selon) G (*direction*). Projecteur associé $q=\mathrm{Id}_E-p$.
- Un **hyperplan** de E est un sev de E qui admet une droite vectorielle comme supplémentaire dans E. Dans ce cas, pour tout vecteur $\vec{b}\notin H$, on a $H\oplus\mathrm{Vect}(\vec{b})=E$.

Familles finies de vecteurs

- Famille liée. Famille libre : caractérisation par l'unicité d'une combinaison linéaire nulle. Unicité de la décomposition sur une famille libre.
- Toute famille de polynômes (non nuls) de degrés deux à deux distincts (échelonnés) est libre dans l'espace $\mathbb{K}[X]$.
- Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
- Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice de cet espace. Equivalence avec l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur de E sur cette famille de vecteurs de E.
  Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace E, définition de la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ de E : notation (personnelle) $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$. Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E, définition de la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ sur la base $\mathcal{B}$ ($M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$) et utilisation de cette matrice pour étudier la liberté de la famille $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ est libre ssi le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est égal au cardinal de $\mathcal{F}$ i.e au nombre de ses colonnes).
  Cas où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ ont le même nombre n de vecteurs : la matrice M est carrée (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), et
  ($\mathcal{F}$ est une base de E) ssi (M est une matrice inversible i.e de rang n i.e $\det(M)\neq 0$).
  Conséquence : si une base de E comporte n vecteurs, toute famille de E comportant au moins $n+1$ vecteurs est nécessairement liée. Opérations élémentaires sur les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ pour déterminer la liberté d'une famille $\mathcal{F}$ ou exhiber une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Si $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k,\vec{e}_{k+1},\dots,\vec{e}_n)$ est une famille libre, alors $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$ et $\mathrm{Vect}(\vec{e}_{k+1},\dots,\vec{e}_n)$ sont en somme directe. Si $\mathcal{B}_1$ est une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ est une base de E_2, avec E_1 et E_2 deux sous-espaces en somme directe d'un espace E, alors la réunion de ces deux bases $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ est une base de la somme directe $E_1\oplus E_2$ (appelée base adaptée à la somme directe $E_1\oplus E_2$). Conséquence : si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases des sev E_1 et E_2 de E, alors on a l'équivalence : (E_1 et E_2 supplémentaires dans E i.e $E_1\oplus E_2=E$)$\Leftrightarrow$ ($\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ est une base de E).

Applications linéaires (1ère partie)

- Applications linéaires, endomorphismes. Combinaisons linéaires et compositions d'applications linéaires : $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev, calculs dans $\mathcal{L}(E)$.
- Image d'un sous-espace par une application linéaire, image et noyau d'une application linéaire : ce sont des sev. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.

Exercices

Exercice 1 Dans $E=\mathbb{R}^3$, soit $H=\{(x,y,z)\in E\mid x-y+2z=0\}$ et $\Delta=\mathrm{vect}(\vec{a})$ avec $\vec{a}=(1,1,1)$. Montrer : $H\oplus\Delta=E$ et donner une expression de $p(\vec{v})$, projeté du vecteur $\vec{v}$ sur H dans la direction Δ.

Exercice 2 Soit $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$), ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ce sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{I}$) l'ensemble des applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui sont paires (respectivement impaires). Ce sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 4 Soit l'espace $E=C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit $H=\{f\in E\mid \int_0^{\pi} f=\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t=0\}$ et $D=\mathrm{Vect}(\sin)$. Montrer que H et D sont des sous-espaces supplémentaires de E.
Justifier $H\oplus\mathrm{Vect}(\exp)=E$. On note p, le projecteur sur H selon la direction D : préciser $p(\cos)$, $p(\sin)$, $p(\tilde{1})$.

Exercice 5 Dans $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que la famille $(\cos,\sin,\exp)$ est libre.

Exercice 6 $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f_k(x)=\sin^k(x)$: montrer que la famille $\mathcal{F}=(f_0,f_1,\dots,f_n)$ est libre dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^{[0,\frac{\pi}{2}]}=\mathcal{F}([0,\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})$.

Exercice 7 Pour $m\in\mathbb{R}$, on définit les polynômes

$$P_1=m+X+X^2+X^3 \quad\text{et}\quad P_2=1+mX+X^2+X^3 \quad\text{et}\quad P_3=1+X+mX^2+X^3 \quad\text{et}\quad P_4=1+X+X^2+mX^3.$$

Pour quelles valeurs de $m\in\mathbb{R}$ la famille $\mathcal{F}=(P_1,P_2,P_3,P_4)$ est-elle une base de $E=\mathbb{R}_3[X]$?
Lorsque $\mathcal{F}$ est liée, préciser une base de $\mathrm{vect}(\mathcal{F})=\mathrm{vect}(P_1,P_2,P_3,P_4)$.

Exercice 8 Si $f\in\mathcal{L}(E,F)$, on a la caractérisation : (f est injective) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Ker}(f)=\{\vec{0}_E\}$).

Exercice 9 Noyau et image de $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5y+6z,7x+8y+9z)$.