Semaine n°24 du 08 au 13 avril 2024

Familles finies de vecteurs

- Famille liée. Famille libre : caractérisation par l'unicité d'une combinaison linéaire nulle. Unicité de la décomposition sur une famille libre.
- Toute famille de polynômes (non nuls) de degrés échelonnés est libre dans l'espace $\mathbb{K}[X]$.
- Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
- Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice de cet espace. Equivalence avec l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur de E sur cette famille de vecteurs de E.
  Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace E, définition de la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ de E : notation (personnelle) $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$. Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E, définition de la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ sur la base $\mathcal{B}$ ($M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$) et utilisation de cette matrice pour étudier la liberté de la famille $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ est libre ssi le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est égal au cardinal de $\mathcal{F}$ i.e au nombre de ses colonnes).
  Cas où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ ont le même nombre n de vecteurs : la matrice M est carrée (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), et
  ($\mathcal{F}$ est une base de E) ssi (M est une matrice inversible i.e de rang n i.e $\det(M) \neq 0$).
  Conséquence : si une base de E comporte n vecteurs, toute famille de E comportant au moins $n+1$ vecteurs est nécessairement liée. Opérations élémentaires sur les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ pour déterminer la liberté d'une famille $\mathcal{F}$ ou exhiber une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre, alors $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ et $\mathrm{Vect}(\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$ sont en somme directe. Si $\mathcal{B}_1$ est une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ est une base de E_2, avec E_1 et E_2 deux sous-espaces en somme directe d'un espace E, alors la réunion de ces deux bases $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de la somme directe $E_1 \oplus E_2$ (appelée base adaptée à la somme directe $E_1 \oplus E_2$).
  Conséquence : si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases des sev E_1 et E_2 de E, alors on a l'équivalence :
  (E_1 et E_2 supplémentaires dans E : $E_1 \oplus E_2 = E$)$\Leftrightarrow$ ($\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E).

Applications linéaires

- Applications linéaires, endomorphismes. Combinaisons linéaires et compositions d'applications linéaires : $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev, calculs dans $\mathcal{L}(E)$.
- Image d'un sous-espace par une application linéaire, image et noyau d'une application linéaire : ce sont des sev. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.
- Si cela a un sens : l'image d'une application linéaire est engendrée par l'image d'une base (ou plus généralement par l'image d'une famille génératrice de l'ensemble de départ). Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base : deux applications linéaires sont égales ssi elles coïncident sur une base. Si E possède une base : une application linéaire $f : E \to F$ est bijective si et seulement si l'image d'une base (de E) est une base (de F). Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.
- Isomorphisme, automorphisme. Réciproque, composée d'isomorphismes. Définition de $\mathrm{GL}(E)$ (*groupe linéaire*).
- Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel : l'application nulle, l'application identité, les homothéties vectorielles. Définition et propriétés de projecteurs et symétries associés à deux sev supplémentaires. Caractérisation, pour $f \in \mathcal{L}(E)$ par
  $\boxed{(f \circ f = f \quad \text{i.e} \quad f^2 = f) \Leftrightarrow (f \text{ projecteur})}$ et $\boxed{(f \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{i.e} \quad f^2 = \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (f \text{ symétrie})}$.

- Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire «$f(\vec{x}) = \vec{y_0}$» si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\vec{y_0} \in F$.
- Rappel : un hyperplan H de E est un sous-espace de E admettant une droite vectorielle comme supplémentaire dans E. Dans ce cas, pour tout vecteur $\vec{a} \notin H$, $H \oplus \mathrm{Vect}(\vec{a}) = E$.
Caractérisation : H est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E i.e s'il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle $\varphi \neq \tilde{0}$ et $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Dans ce cas, pour tout vecteur $\vec{a}$ vérifiant $\varphi(\vec{a}) \neq 0$, on a $H \oplus \mathrm{Vect}(\vec{a}) = E$.

Exercices

Exercice 1 Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que la famille $(\cos, \sin, \exp)$ est libre.

Exercice 2 $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_k(x) = \sin^k(x)$: montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{[0,\frac{\pi}{2}]} = \mathcal{F}([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$.

Exercice 3 Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit les polynômes

$$P_1 = m + X + X^2 + X^3 \quad \text{et} \quad P_2 = 1 + mX + X^2 + X^3 \quad \text{et} \quad P_3 = 1 + X + mX^2 + X^3 \quad \text{et} \quad P_4 = 1 + X + X^2 + mX^3.$$

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est-elle une base de $E = \mathbb{R}_3[X]$?
Lorsque $\mathcal{F}$ est liée, préciser une base de $\mathrm{vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Exercice 4 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$: (f est injective) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$).

Exercice 5 Noyau et image de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$.

Exercice 6 Si f et g (endomorphismes de E) **commutent** ($f \circ g = g \circ f$) alors

$\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 7 Si f et g sont des endomorphismes de E, on a l'équivalence :

$$(f \circ g = \tilde{0}) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)).$$

Exercice 8 f, un endomorphisme d'un ev E vérifiant $f^2 - 2f - 3I = \tilde{0}$ (où $I = \mathrm{Id}_E$).

1. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1}.
2. On pose $g = f - 3I$ et $h = f + I$. Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$.
3. Montrer $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h) = E$.

Exercice 9 Pour tout $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X + 1)P$.
Montrer que f est un endomorphisme de E. Déterminer une base de son image et une base de son noyau. Vérifier : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 10 Soit $E = C^0([0, \pi], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, \pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $H = \left\{ f \in E \mid \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\}$ est un sev de E.
2. Montrer $H \oplus \mathrm{Vect}(\sin) = E$.
3. Donner un autre supplémentaire de H dans E.