Semaine n°25 du 15 au 20 avril 2024

Applications linéaires

- Applications linéaires, endomorphismes. Combinaisons linéaires et compositions d'applications linéaires : $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev, calculs dans $\mathcal{L}(E)$.
- Image d'un sous-espace par une application linéaire, image et noyau d'une application linéaire : ce sont des sev. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.
- Si cela a un sens : l'image d'une application linéaire est engendrée par l'image d'une base (ou plus généralement par l'image d'une famille génératrice de l'ensemble de départ). Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base : deux applications linéaires sont égales ssi elles coïncident sur une base. Si E possède une base : une application linéaire $f : E \to F$ est bijective si et seulement si l'image d'une base (de E) est une base (de F). Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.
- Isomorphisme, automorphisme. Réciproque, composée d'isomorphismes. Définition de $\mathrm{GL}(E)$ (*groupe linéaire*).
- Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel : l'application nulle, l'application identité, les homothéties vectorielles. Définition et propriétés de projecteurs et symétries associés à deux sev supplémentaires. Caractérisation par $f\circ f = f$ i.e $\boxed{f^2 = f \ (\textit{projecteur})}$ et $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ i.e $\boxed{f^2 = \mathrm{Id}_E \ (\textit{symétrie})}$.
- Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire «$f(\vec{x}) = \vec{y_0}$» si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\vec{y_0} \in F$.
- Rappel : un hyperplan H de E est un sous-espace de E admettant une droite vectorielle comme supplémentaire dans E. Dans ce cas, pour tout vecteur $\vec{a} \notin H$, $H \oplus \mathrm{Vect}(\vec{a}) = E$.
  Caractérisation : H est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E i.e s'il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ telle $\varphi \neq \tilde{0}$ et $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Dans ce cas, pour tout vecteur $\vec{a}$ vérifiant $\varphi(\vec{a}) \neq 0$ (donc $\vec{a} \notin H$), on a $H \oplus \mathrm{Vect}(\vec{a}) = E$.

L'intégrale de Riemann

- Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Définition-construction de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment et à valeurs réelles (admis).
- Propriétés immédiates : linéarité, positivité, relation de Chasles.
- Notation, avec $a < b$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Extension au cas $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- Croissance de l'intégrale. Valeur moyenne. Inégalité (avec $a < b$) : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
- Si f est continue sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur $[a,b]$.
- Sommes de Riemann : si f est une fonction **continue** sur le **segment** $[a,b]$, alors :
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
- Théorème Fondamental de l'Analyse : si f est une fonction continue sur l'intervalle I et a un point de I, alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.
  Conséquence : toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.
  Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.
  Intégration par parties, changement de variable : rappels. **Inégalité** de Taylor-Lagrange.
  Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle et à valeurs complexes : définition au moyen des parties réelle et imaginaire. Majoration du module de l'intégrale.

Exercices

Exercice 1 Si f et g (endomorphismes de E) commutent ($f \circ g = g \circ f$) alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 2 Si f et g sont des endomorphismes de E, on a l'équivalence :

$$(f \circ g = \tilde{0}) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)).$$

Exercice 3 f, un endomorphisme d'un ev E vérifiant $f^2 - 2f - 3I = \tilde{0}$ (où $I = \mathrm{Id}_E$).

1. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1}.
2. On pose $g = f - 3I$ et $h = f + I$. Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$.
3. Montrer $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h) = E$.

Exercice 4 Pour tout $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X + 1)P$. Montrer que f est un endomorphisme de E. Déterminer une base de son image et une base de son noyau. Vérifier : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5 Soit $E = C^0([0, \pi], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, \pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $H = \left\{ f \in E \mid \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\}$ est un sev de E.
2. Montrer $H \oplus \mathrm{Vect}(\sin) = E$.
3. Donner un autre supplémentaire de H dans E.

Exercice 6 Trouver la limite, lorsque $n \to +\infty$, de :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}.$$

Exercice 7 Trouver un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, des termes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k + n}}.$$

Exercice 8 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^1. Montrer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx)\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 9 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$: ensemble de définition et calcul de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 10 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t$: justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Parité de f ? Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$, et en déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 11 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$, puis un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 12

1. Rappeler le théorème énonçant l'**inégalité de Taylor-Lagrange**.
2. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$