COMPARAISON DES SUITES RÉELLES

Définitions de dominée-négligeable-équivalente. Cas général.

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$, deux suites réelles (i.e éléments de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est **dominée** par la suite $v = (v_n)_{n\geq 0}$ si on peut écrire, à partir d'un certain rang : $u_n = v_n \times B_n$ où (B_n) est une suite **bornée**.

On note $\boxed{u_n = \mathcal{O}(v_n)}$. On dit aussi que la suite (v_n) *domine* la suite (u_n). On a donc :

$u_n = \mathcal{O}(v_n) \Leftrightarrow$ il existe une suite (B_n) **bornée** et ($\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $[n \geq N \Rightarrow u_n = v_n \times B_n]$).

Exemples : $\dfrac{(1-3\cos n)e^{-n}}{n^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $(1+(-1)^n) \times \arctan(n) \times \sqrt{n^2+n} = \mathcal{O}(n)$.

Remarque : à l'aide de la définition d'une suite bornée, on prouve qu'on a la caractérisation suivante :
(u_n) est dominée par (v_n) ssi il existe une constante C et un rang N à partir duquel on a : $|u_n| \leq C \times |v_n|$.
Autrement dit : ($u_n = \mathcal{O}(v_n)$) $\Leftrightarrow$ ($\exists C \in \mathbb{R}^{(+)}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $[\, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq C \times |v_n|\,]$).

Conséquences :

1. « $u_n = \mathcal{O}(1)$ » signifie exactement « (u_n) est une suite bornée ».
2. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ alors, à partir d'un certain rang, on a l'implication : $(v_k = 0 \Rightarrow u_k = 0)$. Conséquence : « $u_n = \mathcal{O}(0)$ » signifie exactement « (u_n) est une suite constamment nulle à partir d'un certain rang ».

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est **négligeable** devant la suite $v = (v_n)_{n\geq 0}$ si on peut écrire, à partir d'un certain rang : $u_n = v_n \times Z_n$ où (Z_n) est une suite convergeant vers 0, i.e $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = 0$.

On note $\boxed{u_n = o(v_n)}$, ou encore $\boxed{u_n \ll v_n}$ ou parfois $v_n \gg u_n$. On a donc :

$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow$ il existe une suite (Z_n) **CV vers 0** et ($\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $[n \geq N \Rightarrow u_n = v_n \times Z_n]$).

On dit aussi
« la suite (u_n) est *infiniment petite* devant la suite (v_n) », ou encore
« la suite (v_n) est *prépondérante* devant la suite (u_n) », ou encore
« la suite (v_n) est *infiniment grande* devant la suite (u_n) ».

Remarque : à l'aide de la définition d'une suite CV vers 0, on prouve qu'on a la caractérisation suivante :
(u_n) est négligeable devant (v_n) ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel on a : $|u_n| \leq \varepsilon \times |v_n|$.
Autrement dit : ($u_n = o(v_n)$) $\Leftrightarrow$ ($\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $[\, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon \times |v_n|\,]$).

Exemples : $n = o(n^2)$, $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$, $\ln n = o(\sqrt{n})$, $n^5 = o(e^n)$, $e^{-n} = o(\frac{1}{n^10}$.

Conséquence :

1. « $u_n = o(1)$ » signifie exactement « (u_n) est une suite convergente vers 0, i.e $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$».
   Autrement dit : $(u_n \ll 1) \Leftrightarrow (\lim(u_n) = 0)$. On dit, dans ce cas, que la suite (u_n) est infiniment petite.
2. $(1 \ll u_n) \Leftrightarrow (\lim(|u_n|) = +\infty)$: dans ce cas, on dit que la suite (u_n) est infiniment grande.
   Attention : cela ne signifie pas qu'on a $\lim(u_n) = +\infty$ ou $\lim(u_n) = -\infty$ (ex : $u_n = (-2)^n$).
3. Si $u_n = o(v_n)$ alors, à partir d'un certain rang, on a l'implication : $(v_k = 0 \Rightarrow u_k = 0)$. Conséquence : « $u_n = o(0)$ » signifie exactement « (u_n) est une suite constamment nulle à partir d'un certain rang ».

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est **équivalente** à la suite $v = (v_n)_{n \geq 0}$ si on peut écrire, à partir d'un certain rang : $u_n = v_n \times I_n$ où (I_n) est une suite convergeant vers 1, i.e $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 1$. On note $\boxed{u_n \sim v_n}$.
On a donc :

$u_n \sim v_n \Leftrightarrow$ il existe une suite (I_n) **CV vers 1** et ($\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $[n \geq N \Rightarrow u_n = v_n \times I_n]$).

Supposons $u_n \sim v_n$: il existe donc une suite (I_n) convergeant vers 1 telle que, à partir d'un certain rang N_0, on ait l'écriture $u_n = I_n \times v_n$. Mais, puisque $\lim(I_n) = 1 > 0$, on peut donc affirmer que la suite (I_n) est minorée, à partir d'un certain rang N_1, par une constante strictement positive (par exemple $\frac{1}{2}$), et par conséquent $I_n \neq 0$. Ainsi, à partir du rang $N_2 = \max(N_0, N_1)$, on peut écrire $v_n = \frac{1}{I_n} \times u_n$ avec $\lim \frac{1}{I_n} = 1$ car $\lim(I_n) = 1$, ce qui signifie $v_n \sim u_n$.
Conséquence : on a "l'équivalence" $u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$ (ouf...la relation $\sim$ est *symétrique*).
<u>REMARQUE IMPORTANTE</u> :
Si $u_n \sim v_n$ alors, à partir d'un certain rang, on a l'équivalence : $(v_k = 0 \Leftrightarrow u_k = 0)$. Conséquence :

« $\boxed{u_n \sim 0}$ » signifie exactement « $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est constamment nulle à partir d'un certain rang}}$ ».

Autrement dit : ($u_n \sim 0$) $\Leftrightarrow$ ($\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, [$n \geq N \Rightarrow u_n = 0$]).
Une telle suite est parfois dite *presque nulle.*
Ainsi : **aucune suite ne peut être équivalente à zéro** <u>exceptées</u> *les suites stationnaires nulles à partir d'un certain rang.*

Remarque

Une suite convergente (vers 0 ou 1 par exemple) étant nécessairement bornée, on a

$$(u_n = o(v_n) \text{ ou } u_n \sim v_n) \Rightarrow (u_n = \mathcal{O}(v_n))$$

Caractérisations pour les suites non nulles à partir d'un certain rang

On se place désormais dans l'ensemble des suites non-nulles à partir d'un certain rang, autrement dit dans l'ensemble des suites (u_n) pour lesquelles il existe un rang N (dépendant de la suite (u_n) choisie) à partir duquel on a $u_n \neq 0$.
Autrement dit : ((u_n) est non nulle à partir d'un certain rang) $\Leftrightarrow$ ($\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, [$n \geq N \Rightarrow u_n \neq 0$]).

Caractérisations

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites non-nulles à partir d'un certain rang. On obtient, pour ces suites, les caractérisations suivantes :

$$(u_n = \mathcal{O}(v_n)) \Leftrightarrow \left(\text{la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq 0} \text{ est une suite bornée} \right)$$

$$(u_n = o(v_n)) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \right)$$

$$(u_n \sim v_n) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \right)$$

Résultats importants

Soit (u_n) et (v_n) deux suites non-nulles à partir d'un certain rang : on a

$$(u_n \sim v_n) \Leftrightarrow (u_n - v_n = o(v_n)) \Leftrightarrow (v_n - u_n = o(u_n))$$

$$\left(\lim_{n\to+\infty}(u_n) = l \in \mathbb{R}^*\right) \Leftrightarrow (u_n \sim l)$$

si $u_n \sim v_n$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ **alors** $\lim_{n\to+\infty}(v_n) = l$

si $u_n \sim v_n$ **alors** u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang

Quelques règles de calculs

Soit (u_n), (v_n), (w_n), (a_n), (b_n) sont des suites non-nulles à partir d'un certain rang. On a

1. **si** $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(a_n)$ **alors** $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$.
2. **si** $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(b_n)$ **alors** $u_n \times v_n = \mathcal{O}(a_n \times b_n)$.
3. **si** $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ **alors** $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ (*transitivité* : vrai aussi pour o et $\sim$).
4. **si** $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ **alors** $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$.
5. **si** $u_n = \mathcal{O}(1)$ et $v_n = o(a_n)$ **alors** $u_n \times v_n = o(a_n)$.
6. **si** $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ **alors**, pour toute constante réelle λ, $u_n + \lambda v_n = o(a_n)$.
7. **si** $u_n = o(v_n)$ **alors** $u_n + v_n \sim v_n$.
8. **si** $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ **alors** $u_n \times v_n \sim a_n \times b_n$ et $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$.
9. **si** $u_n \sim v_n$ et α est une CONSTANTE réelle **alors** $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (sous réserve d'existence des puissances). Attention : ce résultat est faux si $\alpha \neq$ constante : par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais PAS $(1+\frac{1}{n})^n \sim 1^n = 1$ car $\lim(1+\frac{1}{n})^n = e \neq 1$.
10. ATTENTION : IL EST INTERDIT DE SOMMER DES EQUIVALENTS OU DE LES COMPOSER PAR UNE FONCTION : par exemple $(n^2+n) \sim n^2$ et $-n^2 \sim -n^2+1$, mais il est FAUX que $(n^2+n-n^2 = n) \sim (1 = n^2 - n^2 + 1)$ et FAUX que $e^{n^2+n} \sim e^{n^2}$ car $\frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 1$.
    La seule règle applicable pour la somme d'équivalents est :
    si $u_n \sim \alpha a_n$ et $v_n \sim \beta a_n$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ (CONSTANTES) **alors** $(u_n + v_n) \sim (\alpha+\beta) a_n$.

Comparaisons des suites usuelles

Si q est une **constante** vérifiant $\boxed{q > 1}$ alors

$$\ln(n) \ll n^{\frac{1}{q}} \ll n \ll n^q \ll q^n \ll n!$$

Si a et b sont des **constantes** vérifiant $\boxed{a < b}$ alors : $\boxed{n^a \ll n^b}$ et $\boxed{\frac{1}{n^b} \ll \frac{1}{n^a}}$.

Si, en plus, $\boxed{0 < a < b}$ alors : $\boxed{a^n \ll b^n}$ et $\boxed{\left(\frac{1}{b}\right)^n \ll \left(\frac{1}{a}\right)^n}$.

Par exemple :

$$e^{-n} \ll \left(\frac{1}{2}\right)^n \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\ln n} \ll 1 \ll \ln(n) \ll n^{\frac{1}{3}} \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll n^{10} \ll \left(\frac{3}{2}\right)^n \ll e^n \ll 3^n \ll 10^n \ll n! \ll n^n$$

Plus généralement, on a : si α, β et q sont des CONSTANTES vérifiant $\boxed{\alpha > 0,\ \beta > 0 \text{ et } q > 1}$ alors

$$(\ln n)^\alpha \ll n^\beta \ll q^n \ll n!$$

Rappels : équivalents usuels

Si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle (i.e) $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$, alors :

- $\sin(u_n)\sim u_n$ et $\text{sh}(u_n)\sim u_n$
- $\tan(u_n)\sim u_n$ et $\text{th}(u_n)\sim u_n$
- $\cos(u_n)\sim 1$ et $(\cos(u_n)-1)\sim -\dfrac{u_n^2}{2}$, $\text{ch}(u_n)\sim 1$ et $(\text{ch}(u_n)-1)\sim +\dfrac{u_n^2}{2}$
- $\text{Arcsin}(u_n)\sim u_n$ et $\text{Argsh}(u_n)\sim u_n$
- $\text{Arctan}(u_n)\sim u_n$ et $\text{Argth}(u_n)\sim u_n$
- $e^{u_n}\sim 1$ et $(e^{u_n}-1)\sim u_n$
- $\ln(1+u_n)\sim u_n$
- $\sqrt{1+u_n}\sim 1$ et $(\sqrt{1+u_n}-1)\sim \dfrac{u_n}{2}$
- $(1+u_n)^\alpha\sim 1$ et $[(1+u_n)^\alpha-1]\sim \alpha u_n$ si $\alpha =$ CONSTANTE

Rappels : développements limités usuels (la fonction ε vérifie $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$)

- $\text{DL}_n(0)$ de $\boxed{\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)}$.
- $\text{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + x^n\varepsilon(x) = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x)$.
- $\text{DL}_n(0)$ de $\boxed{\exp(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+x^n\varepsilon(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)}$.
- $\text{DL}_n(0)$ de $\boxed{\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+x^n\varepsilon(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)}$.
- $\text{DL}_n(0)$ de $-\ln(1-x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+x^n\varepsilon(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$.
- $\text{DL}_{2n+2}(0)$ de $\boxed{\sin(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)}$.
- $\text{DL}_{2n+1}(0)$ de $\boxed{\cos(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)}$.
- $\text{DL}_n(0)$ de $(1+x)^\alpha=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1).(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}+x^n\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{n}\text{C}_\alpha^k\frac{x^k}{k!}+x^n\varepsilon(x)$ i.e

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1).(\alpha-2)}{1.2.3}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3.\ldots.(n-1).n}x^n+x^n\varepsilon(x)}.$$

- $\text{DL}_3(0)$ de $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+x^3\varepsilon(x)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3x^2}{8}-\dfrac{5x^3}{16}+x^3\varepsilon(x)$.
- DL(0) de sh(x) $=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$ et ch(x) $=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{x^{2p}}{(2p)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$.
- $\text{DL}_6(0)$ de $\tan(x)=x+\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+x^6\varepsilon(x)$ et $\text{Arcsin}(x)=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x^5}{40}+x^6\varepsilon(x)$.
- $\text{DL}_{2n+2}(0)$ de $\text{Arctan}(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2p+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x)=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$.