I : LIMITE D'UNE FONCTION

But : donner un sens précis à la notion de limite d'une fonction $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ où $a, L \in \overline{\mathbb{R}}$.
On rappelle que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Donc, ici, a et L sont finis ou infinis.

Notion de voisinage : on appelle **voisinage** de
- $x_0 \in \mathbb{R}$: tout ensemble de la forme $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ avec $\eta > 0$, OU contenant un tel ensemble.
- $+\infty$: tout ensemble de la forme $[A, +\infty[$ avec $A > 0$, OU contenant un tel ensemble.
- $-\infty$: tout ensemble de la forme $]-\infty, B]$ avec $B < 0$, OU contenant un tel ensemble.

Définition générale : on dit $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = L}$ si

$\boxed{\text{pour tout voisinage } V_L \text{ de } L \text{ il existe un voisinage } V_a \text{ de } a \text{ tel que : } x \in V_a \Rightarrow f(x) \in V_L}$.

Limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Définition : soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et a est un élément de I, éventuellement une extrémité de I, voire infini, autrement dit $a \in \overline{I} = I \cup \{\inf(I), \sup(I)\}$.
On dit f **admet une limite nulle** en a (noté $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ou encore $\lim\limits_a f = 0$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a sur lequel $|f|$ est majorée par ε (i.e) sur lequel $|f| < \varepsilon$.

Traduction dans les différents cas :

- Si $a \in \mathbb{R}$: $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0\right)$ si $(\,\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon)\,)$
- Si $a = +\infty$: $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0\right)$ si $(\,\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I :\ (x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon)\,)$
- Si $a = -\infty$: $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0\right)$ si $(\,\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I :\ (x \leq B \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon)\,)$

Remarque : $(|x-a| \leq \eta)$ signifie $x \in [a-\eta, a+\eta]$ ou encore $a - \eta \leq x \leq a + \eta$.

Définition : sous les mêmes hypothèses, on dit que f **tend vers** $L \in \mathbb{R}$ **au point** a si la fonction $(f - L)$ admet une limite nulle en a.
On note alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (i.e) $\lim\limits_a f = L$ lorsque $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - L) = 0$ (i.e) $\lim\limits_a (f - L) = 0$.

Traduction dans les différents cas :

- Si $a \in \mathbb{R}$: $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = L\right)$ si $(\,\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)\,)$
- Si $a = +\infty$: $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L\right)$ si $(\,\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I :\ (x \geq A \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)\,)$
- Si $a = -\infty$: $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L\right)$ si $(\,\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I :\ (x \leq B \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)\,)$

Proposition (*unicité de la limite*) : si $\lim\limits_a f = L$ et $\lim\limits_a f = L'$, alors $L = L'$.

Définition : si $\lim\limits_a f = L$, le réel L est appelé **LA limite de la fonction f en** a. On dit aussi que f admet une limite finie au point a (qui est L).

Remarque : on a l'équivalence $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = L\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = L\right)$.

Continuité en un point $a \in I$

Proposition : si a est un point de I (donc $f(a)$ existe) et si $\lim\limits_a f$ existe (et est donc finie) alors, nécessairement, d'après la définition, $\lim\limits_a f = f(a)$.

Définition : on dit que f est **continue au point** $a \in I$ si $\lim\limits_a f$ existe (et vaut donc $f(a)$).
Par conséquent :

$$(f \text{ est continue en } a) \Leftrightarrow (\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I : |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Prolongement par continuité :
si $f : I \to \mathbb{R}$, **si** a est une extrémité de l'intervalle I n'appartenant pas à I, **si** f admet une limite finie L au point a **alors**, en définissant la fonction $\hat{f}$ sur $I \cup \{a\}$ par :

$$\hat{f}(a) := \lim_a f \quad \text{ et } \quad \forall x \in I,\ \hat{f}(x) := f(x),$$

$\hat{f}$ est un prolongement de f mais $\hat{f}$ est l'unique prolongement par continuité en a de la fonction f.
Exemple : pour $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. On a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
En posant $\hat{f}(0) = 1$ et, si $x \in]0, +\infty[$, $\hat{f}(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\hat{f}$ est le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

Limite infinie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Définition : soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, et a est une extrémité de I (i.e $a = \inf(I)$ ou $a = \sup(I)$). On dit f **admet** $+\infty$ **pour limite en** a (noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, ou encore $\lim\limits_a f = +\infty$) si pour tout $M > 0$, il existe un voisinage de a sur lequel f est minorée par M (i.e) sur lequel $f \geq M$.

Traduction dans les différents cas :

- Si $a \in \mathbb{R}$: $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty\right)$ si $(\ \forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (|x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M)\ )$
- Si $a = +\infty$: $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right)$ si $(\ \forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I :\ (x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M)\ )$
- Si $a = -\infty$: $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right)$ si $(\ \forall M > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I :\ (x \leq B \Rightarrow f(x) \geq M)\ )$

De même, ci dessous, on définit la notion de limite en $-\infty$.

Définition : soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, et a est une extrémité de I (i.e $a = \inf(I)$ ou $a = \sup(I)$). On dit f **admet** $-\infty$ **pour limite en** a (noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou encore $\lim\limits_a f = -\infty$) si pour tout $M < 0$, il existe un voisinage de a sur lequel f est majorée par M (i.e) sur lequel $f \leq M$.

Traduction dans les différents cas :

- Si $a \in \mathbb{R}$: $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty\right)$ si $(\ \forall M < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (|x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq M)\ )$
- Si $a = +\infty$: $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\right)$ si $(\ \forall M < 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I :\ (x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M)\ )$
- Si $a = -\infty$: $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\right)$ si $(\ \forall M < 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I :\ (x \leq B \Rightarrow f(x) \leq M)\ )$

Remarque : dans le cas où a est fini, a étant une extrémité de I, la proposition $|x-a| \leq \eta$ se traduit par $a \leq x \leq a + \eta$ (si $a = \inf(I)$, extrémité de gauche) ou par $a - \eta \leq x \leq a$ (si $a = \sup(I)$, extrémité de droite).

Limite à droite ou à gauche

<u>Définition</u> : soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, et a un réel (donc fini) appartenant à $\overline{I}$.
On dit f **admet une limite** $L \in \overline{\mathbb{R}}$ **à droite en** a (noté $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ ou encore $\lim\limits_{a^+} f = L$, où L est finie ou infinie) <u>si</u> $I \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$ et <u>si</u> la restriction de f à l'ensemble $I \cap]a, +\infty[$ admet L pour limite en a (ce qui peut s'écrire $\lim\limits_{a} f_{|I\cap]a,+\infty[} = L$).
<u>Traduction dans les différents cas</u> :

- <u>Si $L \in \mathbb{R}$</u> : $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L\right)$ <u>si</u> $(\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (a < x \leq a + \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)\ )$
- <u>Si $L = +\infty$</u> : $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty\right)$ <u>si</u> $(\ \forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (a < x \leq a + \eta \Rightarrow f(x) \geq M)\ )$
- <u>Si $L = -\infty$</u> : $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty\right)$ <u>si</u> $(\ \forall M < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (a < x \leq a + \eta \Rightarrow f(x) \leq M)\ )$

De même, on définit ci-dessous la notion de limite à gauche.

<u>Définition</u> : soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, et a un réel (donc fini) appartenant à $\overline{I}$.
On dit f **admet une limite** $L \in \overline{\mathbb{R}}$ **à gauche en** a (noté $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ ou encore $\lim\limits_{a^-} f = L$, où L est finie ou infinie) <u>si</u> $I \cap]-\infty, a[\neq \emptyset$ et <u>si</u> la restriction de f à l'ensemble $I \cap]-\infty, a[$ admet L pour limite en a (ce qui peut s'écrire $\lim\limits_{a} f_{|I\cap]-\infty,a[} = L$).
<u>Traduction dans les différents cas</u> :

- <u>Si $L \in \mathbb{R}$</u> : $\left(\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L\right)$ <u>si</u> $(\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (a - \eta \leq x < a \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)\ )$
- <u>Si $L = +\infty$</u> : $\left(\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty\right)$ <u>si</u> $(\ \forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (a - \eta \leq x < a \Rightarrow f(x) \geq M)\ )$
- <u>Si $L = -\infty$</u> : $\left(\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty\right)$ <u>si</u> $(\ \forall M < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I :\ (a - \eta \leq x < a \Rightarrow f(x) \leq M)\ )$

<u>Exemple</u> : avec $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

<u>Définition</u> : dans le cas où a n'est pas égal à $\pm\infty$ (avec $a \in I$), on définit la notion de continuité à droite et à gauche par

- si $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$, alors on dit que f est **continue à droite** en a.
- si $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$, alors on dit que f est **continue à gauche** en a.
- Ainsi : (f est continue en a) $\Leftrightarrow$ (f est continue à droite ET continue à gauche).

<u>Exemple</u> : E (fonction partie entière). On a $\lim\limits_{0^+} E = 0 = E(0)$, donc f est continue à droite en 0. Mais $\lim\limits_{0^-} E = -1 \neq E(0)$ donc f n'est pas continue à gauche en 0.

<u>Conséquences</u> : supposons $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = L$ avec L finie. Alors :

- <u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : si $a \notin I$, alors, en posant $f(a) = L$, on dit qu'on a prolongé f par continuité en a.
- <u>2$^{\text{nd}}$ cas</u> : si $a \in I$, alors, soit $f(a) = L$ (et dans ce cas f est continue en a), soit $f(a) \neq L$ (et dans ce cas f n'a pas de limite au point a (i.e) $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas donc pas continue en a !).

Des propriétés à retenir

Proposition : soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

- Si $\lim\limits_a f = L \in \mathbb{R}$ (finie), alors f est bornée au voisinage de a.
- Si $\lim\limits_a f = L$ avec $L > 0$ ou $L = +\infty$, alors f est minorée, au voisinage de a, par un réel strictement positif (et par conséquent, il existe un voisinage de a sur lequel f est strictement positive) (résultat à adapter si $L < 0$ ou si $L = -\infty$).

Le critère séquentiel pour les limites de fonctions

Proposition : soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$ (donc a et L sont finis ou infinis). Alors, on a l'équivalence :

(f admet L pour limite en a, i.e $\lim\limits_a f = L$)

SI et SEULEMENT SI

(pour toute suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans I : SI $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ ALORS $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$)

Applications du critère séquentiel :

1. Si $f : I \to \mathbb{R}$, si I est stable par f, si $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite convergente vers un réel ℓ avec $\ell \in I$, si f est continue en ℓ, ALORS la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$ (d'où l'égalité $\ell = f(\ell)$ par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$).
2. Pour prouver qu'une fonction f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ à valeurs dans I telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(v_n) = a$ ET $\lim\limits_{n\to\infty}(f(u_n)) \neq \lim\limits_{n\to\infty}(f(v_n))$.
   Remarque : il suffit ausssi de trouver une suite (w_n) admettant a pour limite mais telle que la suite $(f(w_n))$ n'a pas de limite !
3. Autre conséquence importante : le critère séquentiel permet de récupérer, sur les limites de fonctions, tous les résultats obtenus sur les limites de suites (voir ci dessous).

Opérations sur les limites

Proposition :
Si $\lim\limits_a f = L_1$ et $\lim\limits_a g = L_2$ (avec L_1 et L_2 finies), alors

1. $\lim\limits_a(f+g) = L_1 + L_2$ ET $\lim\limits_a(\lambda f) = \lambda L_1$ pour tout réel λ *(linéarité de la limite)*.
2. $\lim\limits_a(f \times g) = L_1 \times L_2$.
3. $\lim\limits_a(|f|) = |L_1|$.

Proposition :
SI f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_a g = 0$, ALORS $\lim\limits_a(fg) = 0$.

Proposition :
SI $\lim\limits_a f = L \neq 0$, ALORS il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas et a le signe de L, et $\lim\limits_a(\dfrac{1}{f}) = \dfrac{1}{L}$.

Proposition :
SI $\lim_a f = +\infty$, ALORS il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas et est positive, et $\lim_a (\frac{1}{f}) = 0$ (résultat à adapter si $\lim_a f = -\infty$).

Proposition :
SI $f \leq g$ (ou même $f < g$) au voisinage de a, et SI $\lim_a f = L_1$ et $\lim_a g = L_2$, ALORS $L_1 \leq L_2$.

Proposition :
SI $|f| \leq g$ au voisinage de a, et SI $\lim_a g = 0$, ALORS $\lim_a f = 0$.

Proposition (théorème d'encadrement) :
SI $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et SI $\lim_a f = \lim_a h = L$ (limite finie), ALORS $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = L$.

Proposition :
SI $f \leq g$ au voisinage de a, et SI $\lim_a f = +\infty$, ALORS $\lim_a g = +\infty$.
SI $f \leq g$ au voisinage de a, et SI $\lim_a g = -\infty$, ALORS $\lim_a f = -\infty$.

Proposition (composition de limites) :
Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, si $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = L$ (avec a, b et L dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_a (g \circ f) = L$.
Conséquence : si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ (avec a fini), alors $g \circ f$ est continue en a *(une composée de fonctions continues est continue)*.

Limites de fonctions monotones sur un intervalle

Proposition : si f est **croissante** sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$ (avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors $\lim_a f$ et $\lim_b f$ **existent**.

On a les différentes situations suivantes :

- Si f est majorée sur I, alors $\lim_b f$ existe, est finie et vaut $\lim_b f = \sup_I(f)$.
  Sinon, dans le cas où f n'est pas majorée sur I, alors $\lim_b f = +\infty$.
- Si f est minorée sur I, alors $\lim_a f$ existe, est finie et vaut $\lim_a f = \inf_I(f)$.
  Sinon, dans le cas où f n'est pas minorée sur I, alors $\lim_a f = -\infty$.
- Si α est un point intérieur à I (i.e α n'est pas une extrémité de I), alors f admet une limite à gauche et à droite en α et on a : $\sup_{I\cap]-\infty,\alpha[} f = \lim_{\alpha^-} f \leq f(\alpha) \leq \lim_{\alpha^+} f = \inf_{I\cap]\alpha,+\infty[} f$

Bien entendu, on a des résultats analogues (à adapter) si f est décroissante sur I.

II : PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES

L'algèbre $C(I, \mathbb{R})$

Définition : soit I, un intervalle non vide et non réduit à un point, et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point a de I.
Ainsi : (f est continue sur I)$\Leftrightarrow$($\forall a \in I$, $\lim_a f$ existe et vaut $f(a)$).

Ou encore : (f est continue sur I)$\Leftrightarrow$($\forall a \in I : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon)$.
Proposition : des propriétés ponctuelles, on déduit les résultats suivants

- Si f et g sont continues sur I, alors $f+g$, $f \times g$ et $\lambda.f$ (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$) sont également continues sur I. Ceci permet de prouver que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions continues sur I, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et également un anneau commutatif (pour les lois $+$ et $\times$).
- Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont continues, alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est une application continue.

Exemples : les fonctions lipschitziennes sur I sont continues sur I. Par conséquent, la fonction identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, puis, par combinaison linéaire de produits de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (en remarquant $X^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \times \ldots \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$), tout polynôme à coefficients réels est continue sur $\mathbb{R}$ (puis par quotient, les fractions rationnelles, rapport de deux polynômes, sont continues sur leurs ensembles de définition).

Le théorème des valeurs intermédiaires

Proposition : «si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application **CONTINUE** sur l'**INTERVALLE** I et si f prend, sur I, deux valeurs c et d, alors, f prend, sur I, toute valeur intermédiaire entre c et d».
Autre énoncé : « si f est continue sur l'intervalle I, alors, pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$ et pour tout y_0 pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un $x_0 \in [a, b]$ tel que $y_0 = f(x_0)$».
Conséquence : si f est continue sur l'intervalle I et si $f(a) \times f(b) \leq 0$ avec $a, b \in I$ (et $a < b$), alors il existe (au moins) un $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$ (remarque : on a même $\alpha \in]a, b[$ si on suppose $f(a) \times f(b) < 0$).
Résultat à retenir : si f est une fonction **continue** sur un **intervalle** I, et si f ne **s'annule pas** sur I (i.e $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$), alors f a, sur I, un **signe constant strict**.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition : si f est continue sur I et si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble image $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est aussi un intervalle.

Théorème : si f est continue sur le SEGMENT $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. Plus précisément : on a $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \underset{[a,b]}{\mathrm{Min}}(f)$ et $M = \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}}(f)$, donc il existe $x_1 \in [a, b]$ et $x_2 \in [a, b]$ tels que $m = f(x_1)$ et $M = f(x_2)$.

Théorème de la bijection monotone

Proposition : soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue et strictement monotone. Alors

- $f(I)$ est un intervalle de même nature que I, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.
- f établit une bijection de I dans $f(I)$.
- la bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue, strictement monotone sur $f(I)$, et de même monotonie que f.