RUDIMENTS DE LOGIQUE - RAISONNEMENTS

Introduction

La théorie Mathématique est basée :
- sur des propositions initiales posées *a priori* comme vraies *(axiomes, postulats).*
- sur des règles permettant de déduire d'autres propositions vraies des précédentes *(théorèmes).*
- sur des définitions de mots nouveaux, à partir des propositions et règles.

1 Un peu de logique

Proposition logique

Définition : une proposition P est un énoncé qui est (exclusivement) :
- soit VRAI
- soit FAUX

(il est donc impossible qu'une proposition soit vraie et fausse en même temps !)

Exemples :
- « $3 \geq 1$ » *(vraie).*
- « $\sqrt{2} \geq 2$ » *(fausse).*
- « pour tout réel x, on a $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ » *(vraie).*
- « pour tout entier $n \geq 1$, on a $2^n \geq n^2$ » *(fausse).*
- « pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$ » *(vraie).*

Négation d'une proposition : si P est une proposition , alors on note «non(P)» la proposition qui est vraie lorsque P est fausse, et qui est fausse losque P est vraie.
Remarque : on note parfois $\neg P$ au lieu de non(P) (négation de la proposition P).
On peut observer que, pour toute proposition P, on a nécessairement soit P, soit non(P) qui est vraie.

Exemples :
- Si P est « ma voiture est blanche », alors non(P) est « ma voiture n'est pas blanche ».
- Soit x un réel. Si P est « $x \geq 5$, alors non(P) est « $x < 5$ ».
- Si P est la proposition «tout le monde est présent», alors non(P) est «il y a au moins un absent».
- Si P est la proposition «l'entier n est pair», alors non(P) est «l'entier n est impair» : en effet, un entier est nécessairement pair ou impair.
- Si P est la proposition «la fonction f est paire», alors non(P) est «la fonction f n'est pas paire» : en effet, il existe des fonctions qui sont ni paires, ni impaires.

Disjonction et conjonction

Si P et Q sont deux propositions, alors on peut en former d'autres. Par exemple, la proposition «P *ou* Q» est une proposition qui est vraie <u>ssi</u> [1] *au moins* l'une des deux propositions P, Q est vraie. Autrement dit, « P *ou* Q » est vraie <u>ssi</u> **soit** P est vraie, **soit** Q est vraie, **soit** P et Q sont vraies. Ainsi « P *ou* Q » est fausse <u>ssi</u> P et Q sont toutes les deux fausses.

<u>Exemples</u> :

- la proposition « ma voiture est blanche *ou* ma voiture est noire » est une proposition fausse (en effet, ma voiture est grise).
- la proposition « les poules ont des dents *ou* il pleut parfois sur Lille » est une proposition vraie.
- la proposition « $\pi > 3$ *ou* $\sqrt{5} > 2$ » est une proposition vraie.
- Pour tout entier n, la proposition « n est pair *ou* n est impair » est une proposition vraie. C'est le cas de toute proposition de la forme « P *ou* non(P) » !

On peut également former une autre proposition : « P *et* Q », qui est une proposition vraie <u>ssi</u> les deux propositions P et Q sont simultanément vraies.
Autrement dit, « P *et* Q » est vraie <u>ssi</u> P est vraie **et** Q est vraie.
Ainsi, la proposition « P *et* Q » est fausse dès que l'une des deux propositions P ou Q est fausse (ou les deux !).

<u>Exemples</u> :

- la proposition « π n'est pas un entier *et* $\pi > 3$ » est vraie.
- la proposition « cos est une fonction paire *et* $\cos(0) = 0$ » est fausse.
- la proposition « la fonction exp est impaire *et* exp s'annule sur $\mathbb{R}$ » est une proposition fausse.

<u>Liens avec la négation</u> :

Soit R, la proposition «P *et* Q». Alors, la négation de R est «non(P) *ou* non(Q)».
Soit S, la proposition «P *ou* Q». Alors, la négation de S est «non(P) *et* non(Q)».
En résumé :

la négation de «P *et* Q» est «non(P) *ou* non(Q)»

et

la négation de «P *ou* Q» est «non(P) *et* non(Q)».

<u>Exemples</u> :

- La négation de «$x \in]2,5]$» i.e la négation de « $x > 2$ *et* $x \leq 5$ » est « $x \leq 2$ *ou* $x > 5$ » i.e «$x \in]-\infty, 2] \cup]5, +\infty[$».
- Soit x un réel. La négation de «$x \geq 0$ *ou* $x^2 - 6x - 5 = 0$» est «$x < 0$ *et* $x^2 - 6x - 5 \neq 0$».

<u>Remarque</u> : en logique, on utilise par fois le symbole «$\wedge$» pour "*et*" , et «$\vee$» pour "*ou*".

[1] si et seulement si

Implication et équivalence

Soit P et Q, deux propositions. On peut former la proposition $(P \Rightarrow Q)$ ("P implique Q").
Définition : $(P \Rightarrow Q)$ est vraie signifie : si P est vraie, alors Q est vraie.
Attention : affirmer que "$(P \Rightarrow Q)$ est vraie" ne signifie absolument pas que P est vraie ou que Q est vraie, mais simplement que soit P et Q sont simultanément vraies, soit P est faux (et on ne peut rien dire sur Q).
On dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q ("dès qu'on a P, on a Q"), et que Q est une **condition nécessaire** pour avoir avoir P mais pas forcément suffisante car $(P \Rightarrow Q)$ peut être vraie et $(Q \Rightarrow P)$ fausse ("si on veut avoir P, il faut forcément supposer Q vraie, mais cela ne suffit pas en général").
Exemples : soit x, un réel.

- $(x = 3) \Rightarrow (x^2 = 9)$ est une implication vraie.
- $(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)$ est une implication fausse. En effet, il existe un cas où $(x^2 = 9)$ est vraie et $(x = 3)$ est fausse. Par contre, l'implication suivante est vraie : $(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -3)$.
- $(x > 3) \Rightarrow (x^2 > 9)$ est une implication vraie.
- $(x < -3) \Rightarrow (x^2 > 9)$ est une implication vraie.
- $(\pi = 3) \Rightarrow (x^2 = 16)$ est une implication vraie : en effet, puisque $(\pi = 3)$ est trivialement fausse, l'implication précédente est vraie, peu importe que $(x^2 = 16)$ soit vraie ou fausse !
- $(0 = 1) \Rightarrow (\frac{1}{2} = \frac{2}{4})$ et $(0 = 1) \Rightarrow (\frac{1}{2} = \frac{2}{5})$ sont deux implications vraies, car la proposition $(0 = 1)$ est fausse !

A retenir : si P est fausse, alors l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est toujours vraie (indépendemment de la valeur de Q) ! Ceci a une conséquence importante : dans un raisonnement, si l'on veut prouver un résultat et si l'on part d'une hypothèse fausse, alors, même avec des raisonnements justes, la preuve n'est pas valable et aucun crédit ne peut être apporté au résulat obtenu.
Par exemple : si on suppose $1 = 0$, alors, en multipliant à gauche et à droite de l'égalité par un réel x quelconque (propriété licite connue), on obtient $x \times 1 = x \times 0$. En prenant $x = 2$, on obtient $2 = 0$, ce qui est clairement faux ; mais en prenant $x = 0$, on obtient $0 = 0$, ce qui est vrai !
Remarque : si P et Q sont deux propositions, alors l'implication suivante est vraie

$$(P \ et \ Q) \Rightarrow (P \ ou \ Q)$$

Négation d'une implication :

la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est (P et non(Q)).

Autrement dit, prouver que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est fausse revient à (P est vraie et Q est fausse).
Exemples :

- Affirmons : «je prends mon parapluie dès qu'il pleut». Elle peut se traduire par «s'il pleut, je prends mon parapluie», ou encore par l'implication (il pleut $\Rightarrow$ je prends mon parapluie) : "il pleut" est donc une condition suffisante pour que je prenne mon parapluie. Mais elle n'est pas nécessaire, car il est fort possible que j'utilise mon parapluie pour me faire de l'ombre en temps

de canicule.
La négation de la phrase précédente est : « il pleut *et* je ne prends pas mon parapluie ».
- Affirmons : «les champignons ne poussent qu'en automne». Voir les champignons pousser est donc une condition suffisante pour affirmer qu'on est en automne, mais non nécessaire. En effet, il est possible qu'un été soit trop sec et que l'automne se passe sans que les champignons ne poussent : une année sans champignon, ça existe !
La négation de la phrase précédente est : « les champignons poussent *et* ce n'est pas l'automne».

Dans plusieurs exemples précédents, on avait l'implication $(P \Rightarrow Q)$ vraie mais l'implication $(Q \Rightarrow P)$ fausse. Dans ce cas, P est une condition suffisante pour avoir Q, mais pas nécessaire : "P entraîne Q", mais qu'il n'y a pas de réciproque. On dit aussi que les deux propositions P et Q ne sont pas équivalentes.
<u>Définition</u> :
"deux propositions P et Q sont dites **équivalentes** si on a, à la fois, $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$".
On note, dans ce cas : $(P \Leftrightarrow Q)$ ("P est *équivalente* à Q"). Les deux propositions sont alors simultanément vraies et simultanément fausses.
Le symbole $\Leftrightarrow$ peut être remplacé par "si et seulement si" (<u>ssi</u>).
<u>Exemples</u> : (x, y représentent des réels)
- $(x^2 = 9) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -3)$.
- $(x^2 > 9) \Leftrightarrow (x > 3 \text{ ou } x < -3)$.
- $(x \geq 0) \Leftrightarrow (x = |x|)$.
- $(x \leq y) \Leftrightarrow (x < y \text{ ou } x = y)$.
- (le triangle ABC est rectangle en A) $\Leftrightarrow (AB^2 + AC^2 = BC^2)$.

On peut résumer certains résultats précédents par les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
(\ P\ ) & \Leftrightarrow & (\ \text{non}(\text{non}(P)\ ) \\
(\ P \Leftrightarrow Q)\ ) & \Leftrightarrow & (\ (P \Rightarrow Q)\ \textit{et}\ (Q \Rightarrow P)\ ) \\
(\ \text{non}(P \Rightarrow Q)\ ) & \Leftrightarrow & (\ P\ \textit{et}\ \text{non}(Q)\ ) \\
(\ \text{non}(P\ \textit{et}\ Q)\ ) & \Leftrightarrow & (\ \text{non}(P)\ \textit{ou}\ \text{non}(Q)\ ) \\
(\ \text{non}(P\ \textit{ou}\ Q)\ ) & \Leftrightarrow & (\ \text{non}(P)\ \textit{et}\ \text{non}(Q)\ )
\end{array}$$

2 Les quantificateurs

Pour synthétiser l'écriture, on utilise des symboles, en particulier les quantificateurs «$\exists$» (*existentiel*) et «$\forall$» (*universel*).
- $\exists$ se lit "il existe (au moins) un", ou encore "pour au moins un".
- $\forall$ se lit "pour tout", "pour chaque", "pour tous les", ou encore "quel que soit".

On rencontre parfois « $\exists!$» pour signifier l'existence et l'unicité ("il existe un unique", "il existe un et un seul").

Attention : il peut y avoir existence sans qu'il y ait unicité. Par exemple, il existe un x tel que $\cos x = \sin x$ ($x = \frac{\pi}{4}$), mais il y a d'autres solutions ($x = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ en est une autre).
Mais il peut aussi y avoir l'unicité sans qu'il y ait existence. Par exemple, on sait que, si f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors l'équation «$f(x) = 0$» ne peut avoir qu'une seule solution, mais cette solution peut ne pas exister (voir $\exp(x) = 0$ qui n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$).
Quelques exemples de traduction :

(tous les réels ont un carré positif)	$\to\to$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0.$
(l'équation $\tan x = x$ possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$)	$\to\to$	$\exists x \in \mathbb{R},\ \tan x = x.$
(la fonction cosinus est à valeurs dans l'intervalle $[-1, +1]$)	$\to\to$	$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \in [-1, +1]$.
(l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ possède une unique solution réelle)	$\to\to$	$\exists! x \in \mathbb{R},\ x^3 + x + 1 = 0.$
(le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ ne possède pas de racine réelle)	$\to\to$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \neq 0.$
(il existe un seul réel x tel que $\ln x = 1$)	$\to\to$	$\exists! x \in \mathbb{R},\ \ln x = 1.$

Quantificateurs et négation

Soit E un ensemble, et P une proposition.
La négation de ($\exists x \in E,\ P$) est ($\forall x \in E,\ \text{non}(P)$).
La négation de ($\forall x \in E,\ P$) est ($\exists x \in E,\ \text{non}(P)$).
Autrement dit :

$$\text{non}(\ \exists x \in E,\ P\ ) \iff (\ \forall x \in E,\ \text{non}(P)\ )$$
$$\text{non}(\ \forall x \in E,\ P\ ) \iff (\ \exists x \in E,\ \text{non}(P)\ )$$

Exemples

- La négation de la phrase "tout le monde est présent" ($\to \forall x \in$ PCSI2, x est présent) est "il y a au moins un élève qui est absent" ($\to \exists x \in$ PCSI2, non(x est présent)).
- Si f et g sont deux fonctions définies sur un ensemble E, on dit qu'elles sont égales (noté $f = g$) si elles «coincident partout». Autrement dit : ($f = g$) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$).
  Ainsi, on peut dire que deux fonctions f et g ne sont pas égales, noté $f \neq g$, si ($\exists x \in E,\ f(x) \neq g(x)$), ce qui signifie que, pour prouver que deux fonctions sont différentes, il suffit de trouver UN élément x sur lequel elles diffèrent !
  Par exemple, $\cos \neq \sin$ car $1 = \cos(0) \neq \sin(0) = 0$! Ce qui n'empêche pas $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$.
- Une fonction f définie sur E est dite *nulle* si elle vaut 0 en tout élément de E. On notera, entre nous, $\tilde{0}$ pour la *fonction nulle* (on a : $\forall x \in E,\ \tilde{0}(x) = 0$).
  Ainsi ($f = \tilde{0}$) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in E,\ f(x) = 0$), et par conséquent ($f \neq \tilde{0}$) $\Leftrightarrow$ ($\exists x \in E,\ f(x) \neq 0$).
  A ne pas confondre avec «la fonction f s'annule sur E», qui se traduit par ($\exists x \in E,\ f(x) = 0$).
  Par exemple, cos n'est pas la fonction nulle car, par exemple $\cos(\pi) \neq 0$, mais elle s'annule sur $\mathbb{R}$ car, par exemple, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.
- Soit $u = (u_n)_{n\geq 0} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.
  Cette suite u est constante et égale à a si tous ses termes sont égaux à a, (i.e) si
  «$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a$».

Cette suite est constante s'il existe un réel a tel que tous ses termes sont égaux à a,(i.e) si

$$«\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a».$$

Négation : une suite u n'est pas constante si

$$«\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq a»,$$

ce qui se traduit par : pour tout réel a, il existe au moins un rang n pour lequel le terme u_n est différent de a.

Remarque : l'ordre des quantificateurs est important. Par exemple, aucune suite réelle ne peut vérifier la propriété «$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ u_n \neq a$», car cela signifie qu'il existe un rang n pour lequel u_n est différent de tous les réels, ce qui est absurde car ce terme u_n est un réel !

A RETENIR : faire très attention à l'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ (les intervertir change le sens en général).

Remarque : il y a une façon plus simple de traduire le fait qu'une suite est constante :
«$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$», car ceci signifie $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = \cdots$!

Négation : une suite n'est pas constante si «$\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq u_{n+1}$» (i.e) s'il existe au moins un rang pour lequel le terme de la suite est différent de son suivant.

– Une suite réelle $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est dite stationnaire si elle est constante (égale à un certain réel que l'on notera a) à partir d'un certain rang (que l'on notera n_0). Ceci se traduit par :

$$«\ \exists a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow u_n = a)\ ».$$

Remarque : dans cette définition, on peut facilement voir que le a est unique, mais pas le n_0 (si une suite est constante à partir du rang n_0, elle l'est forcément à partir de tout rang n'_0 supérieur à n_0 !).

Négation :on peut écrire qu'une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas stationnaire si elle vérifie :

$$«\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0\ et\ u_n \neq a)\ ».$$

– Une suite réelle $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est dite majorée si tous ses termes sont plus petits qu'une certaine constante, (i.e) s'il existe une constante réelle (notons-là M) qui est supérieure à tous les termes de la suite. Cela se traduit par :

$$«\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M\ ».$$

Remarque 1 : dans cette définition, la valeur de M pour une suite u majorée n'est pas unique (il est clair que toute valeur M' supérieure à M convient également).

Remarque 2 : si on intervertit l'ordre des deux quantificateurs (i.e)
« $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R},\ u_n \leq M$», on obtient une définition qui est vérifiée par n'importe quelle suite réelle ! En effet, elle dit que, pour n'importe quel rang n, on peut trouver un réel supérieur eu terme u_n, ce qui est toujours possible (il suffit de prendre $M = u_n + 5$!). On retiendra donc que, dans la définition de "u est majorée", le M est indépendant des valeurs de n, ce qui n'est plus forcément le cas quand on intervertit l'ordre.

Négation : on peut écrire qu'une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée si elle vérifie :

$$«\ \forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M\ ».$$

Traduction : la suite n'est pas majorée si, peu importe la valeur du réel M (même très grande), il existera toujours au moins un terme de la suite qui lui sera strictement plus grand.

– Soit I un intervalle et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est strictement croissante sur I si
$$\text{« } \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)] \text{ ».}$$
La négation de cette propriété est donc :
$$\text{« } \exists x \in I,\ \exists y \in I,\ [x < y \text{ et } f(x) \geq f(y)] \text{ ».}$$
ce qui signifie qu'il existe (au moins) deux réels x et y dans I vérifiant $x < y$ mais pas $f(x) < f(y)$ (donc tels que $f(x) \geq f(y)$).
Attention : ceci ne signifie pas pour autant que f est décroissante sur I, car pour cela il faudrait que la propriété $f(x) \geq f(y)$ soit vraie pour TOUS les réels x et y vérifiant $x < y$.

– La proposition P : «$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$» est une proposition fausse (elle affirme que tout réel peut s'écrire comme le carré d'un certain réel !). Pour prouver cela, il suffit de vérifier que sa négation est vraie : or, non(P) est «$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \neq x^2$», ce qui signifie qu'il existe (au moins) un réel y qui ne soit le carré d'aucun réel x. Ce réel y existe bien, il suffit de prendre $y = -1$, qu'il est impossible d'écrire sous la forme $-1 = x^2$ avec x réel ! On peut remarquer qu'il n'y a pas unicité d'un tel y, puisque tout réel y strictement négatif convient.

3 Le raisonnement par récurrence

On veut prouver qu'une proposition $P(n)$, dépendant d'un entier n, est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. Pour cela, on peut parfois procéder par récurrence. Le principe est le suivant :
Récurrence simple : soit $P(n)$, une proposition dépendant d'un entier n.

- SI la proposition $P(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- SI, pour tout entier $n \geq n_0$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie (*hérédité*)
- ALORS, par récurrence sur l'entier n, on a prouvé que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

C'est le principe des dominos : si l'on sait que, dès qu'un domino tombe, le suivant tombe (*hérédité*), alors il suffit d'en faire tomber un (*initialisation*) pour être sûr qu'ils tombent tous à partir de celui-ci.

Exemples

– Soit, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n =$ la somme des carrés des n premiers entiers .
Ainsi $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$: on peut la symboliser par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
On demande de prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Tout d'abord, posons la proposition $P(n)$: «$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$».
• Initialisation : $S_1 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1(1+1)(2 \times 1+1)}{6} = \dfrac{2 \times 3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$, donc la proposition $P(1)$ est vraie car $S_1 = \dfrac{1(1+1)(2 \times 1+1)}{6}$.

• Hérédité : soit un entier $n \geq 1$. Supposons que, pour ce rang n, $P(n)$ est vraie, et montrons que, sous cette hypothèse, la proposition $P(n+1)$ est vraie.
Supposant $P(n)$ vraie pour ce rang n, on peut affirmer $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Mais alors, comme $S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2$, on peut écrire $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$, d'où $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$, puis $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(2n^2+n+6(n+1)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ce qui s'écrit encore $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, ce qui prouve que la proposition $P(n+1)$ est vraie (sous l'hypothèse que $P(n)$ soit vraie).
• Conclusion :
⋆ $P(1)$ est vraie.
⋆ Pour tout entier $n \geq 1$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

⋆ Donc, par récurrence simple sur n, on a prouvé que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

– Pour tout entier $n \geq 0$, on pose la proposition $P(n)$: «$n^2 \leq 2^n$». On voudrait savoir pour quels entiers n $P(n)$ est vraie.
On vérife facilement $0^2 = 0 \leq 2^0 = 1$, $1^2 = 1 \leq 2^1 = 2$, $2^2 = 4 \leq 2^2 = 4$, $3^2 = 9 > 2^3 = 8$, $4^2 = 16 \leq 2^4 = 16$, $5^2 = 25 \leq 2^5 = 32$, $6^2 = 36 \leq 2^6 = 64$, ...
Ainsi : $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, sont vraies, $P(3)$ est fausse, puis il "semble" que $P(n)$ soit vraie pour tout entier $n \geq 4$ (*conjecture*). Prouvons-le par récurrence simple sur n.
• $P(4)$ est vraie, car $4^2 = 16 \leq 2^4 = 16$ (il y a même égalité des deux membres, donc l'inégalité large est juste).
• Soit un entier $n \geq 4$ (fixé) : supposons, pour cet entier n, que $P(n)$ est vraie (i.e) supposons que «$n^2 \leq 2^n$». On en déduit, par multiplication à gauche et à droite de l'inégalité par 2 (licite car $2 \geq 0$) : «$2n^2 \leq 2^{n+1}$».
Or, on veut arriver à prouver $P(n+1)$ (i.e) «$(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$» ! Pour déduire ceci de notre résultat obtenu pour l'instant «$2n^2 \leq 2^{n+1}$», il SUFFIRAIT d'avoir $(n+1)^2 \leq 2n^2$!
Or, $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 \geq 0$ pour $n \geq 4$: en effet, le polynôme $Q(x) = x^2 - 2x - 1$ est positif "à l'extérieur" de ses deux racines réelles, (i.e) $Q(x) \geq 0$ si $x \notin]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[$, d'où le résultat en remarquant $n \geq 4 > 1 + \sqrt{2} \approx 2,414$.
Ainsi, on a $(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2^{n+1}$, d'où l'on tire $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$, (i.e) $P(n+1)$ est vraie.
• Conclusion :
⋆ $P(4)$ est vraie.
⋆ Pour tout entier $n \geq 4$, si $P(n)$ et vraie, alors $P(n+1)$ est vraie, autrement dit :

$$\forall n \geq 4, \quad P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

$\star$ Donc, par récurrence simple sur n, on a prouvé que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 4$, autrement dit :

$$\forall n \geq 4, \; n^2 \leq 2^n.$$

Remarque : lors de la preuve de l'hérédité $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on a utilisé le fait que $n \geq 4$, ce qui n'est pas étonnant puisque sachant que $P(2)$ était vraie et $P(3)$ fausse, l'hérédité ne pouvait pas s'établir pour n'importe quel rang.

– On demande de prouver le résultat suivant : «pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 3».

Rappelons "un entier N est divisible par 3" (ou encore est un multiple de 3) signifie qu'il existe un entier k tel que $N = 3 \times k$.

D'où la caractérisation : (N est divisible par 3) $\Leftrightarrow$ ($\exists k \in \mathbb{Z}$, $N = 3 \times k$).

Posons la proposition $P(n)$: «$n^3 - n$ est divisible par 3 ».

• $P(0)$ est vraie. En effet, $0^3 - 0 = 0$, et 0 est divisible par 3 car $0 = 3 \times 0$.

On peut observer, même si ce n'est pas nécessaire ici, que $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies car $1^3 - 1 = 0 = 3 \times 0$ et $2^3 - 2 = 6 = 3 \times 2$.

• Soit un entier $n \geq 0$ fixé : supposons, pour cet entier n, que $P(n)$ est vraie ; on est donc assuré de l'existence d'un entier k tel que $n^3 - n = 3 \times k$.

On peut alors écrire : $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 2n$, ou astucieusement $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 - n + 3(n^2 + n)$. Avec l'hypothèse faite, on peut écrire $(n+1)^3 - (n+1) = 3 \times k + 3(n^2 + n)$, d'où l'on tire l'égalité $(n+1)^3 - (n+1) = 3 \times (k + n^2 + n)$, où $(k + n^2 + n)$ est bien un entier car k et n sont des entiers. Ceci prouve que $(n+1)^3 - (n+1)$ est un multiple de 3 (i.e) la proposition $P(n+1)$ est vraie (en supposant $P(n)$ vraie).

• Conclusion :

$\star$ $P(0)$ est vraie.

$\star$ Pour tout entier $n \geq 0$, si $P(n)$ et vraie, alors $P(n+1)$ est vraie, autrement dit :

$$\forall n \geq 0, \quad P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

$\star$ Donc, par récurrence simple sur n, on a prouvé que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, autrement dit :

$$\forall n \geq 0, \; n^3 - n \text{ est divisible par 3.}$$

ATTENTION : il est indispensable de vérifier l'initialisation dans une récurrence, comme le prouve l'exemple suivant. Posons la propriété $Q(n)$: «$10^n + 1$ est divisible par 9».

Pour tout entier $n \geq 0$, on a bien l'hérédité $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$: en effet, si on suppose $Q(n)$ vraie (i.e) si on suppose qu'il existe un entier k tel que $10^n + 1 = 9 \times k$, alors

$10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10 \times (9 \times k - 1) + 1$, en utilisant $10^n = 9 \times k - 1$, autrement dit

$10^{n+1} + 1 = 10 \times (9 \times k - 1) + 1 = 9 \times 10 \times k - 10 + 1 = 9 \times (10k - 1)$, avec $(10k - 1)$ qui est bien un entier car k en est un. Ceci prouve que $10^{n+1} + 1$ est bien divisible par 9 (i.e) $Q(n+1)$

est vraie (si on suppose $Q(n)$ vraie).
MAIS AUCUNE des propositions $Q(n)$ n'est vraie ! En effet, il est aisé de voir qu'aucun des nombres 10^n+1 (11, 101, 1001, 10001 etc...) n'est divisible par 9 (utiliser un critère de divisibilité par 9 vu au collège) !

– Soit la suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ définie par
$$u_0=1,\ u_1=6 \text{ et, pour tout entier } n\geq 2,\ u_n=6u_{n-1}-9u_{n-2}.$$
Ainsi, $u_2=6u_1-9u_0=36-9=27$, $u_3=6u_2-9u_1=6\times 27-9\times 6=108$.
On veut prouver que, pour tout entier $n\geq 0$, $u_n=(n+1)3^n$. Il est clair que le principe de *récurrence simple* ne permettra pas de prouver ce résultat : en effet, connaître un renseignement sur un terme de la suite ne permet pas d'en déduire quelque chose sur le suivant, car la définition de la suite nous oblige à connaitre des résultats sur deux termes consécutifs pour éventuellement en déduire quelque chose sur le terme suivant. On va donc procéder à l'aide d'une **récurrence double** : posons la proposition $P(n)$:«$u_n=(n+1)3^n$».
• Initialisation : $u_0=1=(0+1)\times 3^0$ (rappel : $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^0=1$) et $u_1=6=2\times 3=(1+1)\times 3^1$, donc les propositions $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
• Hérédité : soit un entier $n\geq 2$ (fixé).
Pour cet entier n, supposons que $P(n-2)$ **et** $P(n-1)$ sont vraies, (i.e) supposons que $u_{n-2}=(n-2+1)3^{n-2}=(n-1)3^{n-2}$ et $u_{n-1}=(n-1+1)3^{n-1}=n3^{n-1}$.
Montrons que, sous ces hypothèses, $P(n)$ est vraie !
Or, par définition, $u_n=6u_{n-1}-9u_{n-2}$, d'où, grâce aux hypothèses faites, on obtient $u_n=6\times n3^{n-1}-9\times(n-1)3^{n-2}=2\times 3\times n3^{n-1}-3^2\times(n-1)3^{n-2}=2n3^n-(n-1)3^n$ d'où $u_n=(2n-n+1)3^n=(n+1)3^n$, (i.e) $u_n=(n+1)3^n$, donc $P(n)$ est vraie !
• Conclusion :
⋆ $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
⋆ Pour tout entier $n\geq 2$, si $P(n-2)$ et $P(n-1)$ sont vraies, alors $P(n)$ est vraie, autrement dit :
$$\forall n\geq 2,\quad (\ P(n-2) \text{ et } P(n-1)\ )\Rightarrow P(n).$$
⋆ Donc, par **récurrence double** sur n, on a prouvé que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq 0$, autrement dit :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n=(n+1)3^n.$$
ATTENTION : dans le cas d'une récurrence double, l'initialisation consiste à vérifier *deux* rangs consécutifs (ici $P(0)$ et $P(1)$). Il faut également vérifier que l'hérédité s'applique bien sur ces rangs pour que la récurrence puisse "démarrer" (ici, on a pris $n\geq 2$, donc la première valeur possible est $n=2$, donc en supposant $P(n-2)=P(0)$ et $P(n-1)=P(1)$ vraies, ce qui est le cas par initialisation, on en déduit $P(n)=P(2)$, puis avec $P(1)$ et $P(2)$, on déduit $P(3)$, puis avec $P(2)$ et $P(3)$, on déduit $P(4)$ etc...).
Remarque : on peut généraliser ce principe de récurrence double à d'autres récurrences multiples. Par exemple, pour une **récurrence triple**, cela pourrait donner :

• Initialisation : $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.
• Hérédité : pour tout entier $n \geq 3$, si $P(n-3)$, $P(n-2)$ et $P(n-1)$ sont vraies, alors $P(n)$ est vraie.
• Conclusion : par récurrence triple sur n, on a prouvé que, pour tout entier $n \geq 0$, $P(n)$ est vraie.

– Parfois, il arrive que l'on ne sache pas à l'avance combien de rangs il faut supposer vrais, afin d'en déduire l'hérédité. On utilise alors le **principe de récurrence forte**. En voici le principe général :
• Initialisation : $P(0)$ est vraie.
• Hérédité : pour tout entier $n \geq 0$,
si $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n-1)$, $P(n)$ sont vraies, alors $P(n+1)$ est vraie.
• Conclusion : par **récurrence forte** sur n, on a prouvé que, pour tout entier $n \geq 0$, $P(n)$ est vraie.
Exemple : soit une suite $S = (S_n)_{n\geq 0}$ définie par $S_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$,
$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k = \binom{n}{0} S_0 + \binom{n}{1} S_1 + \cdots + \binom{n}{n-1} S_{n-1} + \binom{n}{n} S_n,$$
où $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (coefficient binomial).
Remarque : on peut vérifier que S_n représente le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.
Quelques calculs : on a
(pour $n = 0$) $\displaystyle S_1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} S_k = \binom{0}{0} S_0 = 1.S_0 = 1.$
(pour $n = 1$) $\displaystyle S_2 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} S_k = \binom{1}{0} S_0 + \binom{1}{1} S_1 = 1.S_0 + 1.S_1 = 2.$
(pour $n = 2$) $\displaystyle S_3 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} S_k = \binom{2}{0} S_0 + \binom{2}{1} S_1 + +\binom{2}{2} S_2 = 1.S_0 + 2.S_1 + 1.S_2 = 5.$
Question : montrer que, pour tout entier $n \geq n$, on a $S_n \leq n!$.
Appelons $P(n)$ cette inégalité.
• Initialisation : $P(0)$ est vraie, car $S_0 = 1 \leq 0! = 1$.
• Hérédité : pour tout entier $n \geq 0$, supposons que $P(0)$, ..., $P(n-1)$, $P(n)$ sont vraies. Il reste à vérifier que, sous ces hypothèses, on a $P(n+1)$ vraie (i.e) $S_{n+1} \leq (n+1)!$.
Or, on a $\displaystyle S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k = \binom{n}{0} S_0 + \binom{n}{1} S_1 + \cdots + \binom{n}{n-1} S_{n-1} + \binom{n}{n} S_n,$
avec l'hypothèse $S_k \leq k!$ pour tous les $k = 0 \ldots n$, d'où l'on tire la première inégalité :
$$S_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \right).$$
Mais, pour tout $k = 0 \ldots n$, $(n-k)! \geq 1$, donc $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$ d'où l'on tire

$$S_{n+1} \leq n! \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}\right) \leq n! \times \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = n! \times (1+1+\cdots+1) = n! \times (n+1) = (n+1)!,$$

(i.e) $S_{n+1} \leq (n+1)!$. Donc $P(n+1)$ est vérifiée.

• Conclusion :

⋆ $P(0)$ est vraie.

⋆ $\forall n \geq 0 : (\ P(0), \dots, P(n-1), P(n)\ ) \Rightarrow (\ P(n+1)\ )$.

Par récurrence forte sur n, on a prouvé que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, (i.e) $S_n \leq n!$.

Exemple : montrons que tout entier $n \geq 2$ se décompose en un produit de nombres premiers.
On rappelle qu'un entier $N \geq 2$ est premier s'il n'est divisible que par lui-même et par 1.
Sont premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, etc...
Par contre, 2007 n'est pas premier car $2007 = 3^2 \times 223$ (mais ceci prouve que la propriété est vraie pour $n = 2007$ car 223 est un nombre premier).
Posons donc la proposition $P(n)$: «n se décompose en un produit de nombres premiers».

• Initialisation : $P(2)$ est vraie, car $2 = 2$ est premier (produit à un facteur).

• Hérédité : pour tout entier $n \geq 2$, supposons $P(2)$, ..., $P(n-1)$, $P(n)$ vraies. Il faut montrer que $n+1$ se décompose en un produit de nombres premiers. Séparons les cas :

⋆ soit $n+1$ est un nombre premier, et dans ce cas il se décompose bien comme un produit de nombres premiers : lui-même !

⋆ soit $n+1$ n'est pas un nombre premier. Dans ce cas, il existe nécessairement deux nombres entiers N_1 et N_2 tels que $n+1 = N_1 \times N_2$ avec $2 \leq N_1 \leq n$ et $2 \leq N_2 \leq n$. Par hypothèse de récurrence, on a nécessairement $P(N_1)$ et $P(N_2)$ vraies, donc N_1 et N_2 se décomposent en un produit de nombres premiers, et il en est alors de même pour l'entier $n = N_1 \times N_2$.

Dans ces deux cas, on a réussi à en déduire que $P(n+1)$ est vraie !

• Conclusion :

⋆ $P(2)$ est vraie.

⋆ $\forall n \geq 2 : (\ P(2), \dots, P(n-1), P(n)\ ) \Rightarrow (\ P(n+1)\ )$.

Par récurrence forte sur n, on a prouvé que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$, (i.e) tout entier $n \geq 2$ se décompose en un produit de nombres premiers.

ATTENTION : dans ce genre de récurrence, il faut parfois vérifier plusieurs rangs dans l'initialisation. C'est le cas lorsque l'hérédité nécessite de supposer vraies plusieurs rangs pour pouvoir s'opérer. Il ne faut donc pas oublier de justifier la validité en remarquant que l'hérédité permet bien, à partir des premiers rangs, "d'initialiser le processus".

Plus généralement, comme le montre l'exemple qui suit, il faut appliquer la preuve de l'hérédité sur les premiers rangs vérifiés lors de l'initialisation pour voir si la récurrence "s'enclenche correctement".

Nous allons prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, «toute classe de n élèves qui possède au moins une fille n'est constituée que de filles». En effet, appelons $P(n)$ cette proposition.

Initialisation : elle est vraie pour $n = 1$ car dans une classe de $n = 1$ élève qui possède au moins

une fille, il n'y a bien que des filles !
Hérédité : supposons, pour un entier $n \geq 1$ fixé, que la propriété $P(n)$ est vraie. Nous allons prouver que la propriété $P(n+1)$ est vraie ! En effet, soit une classe de $n+1$ élèves qui comporte au moins une fille. On enlève de cette classe un élève, de manière à ce qu'il reste au moins une fille dans le groupe de n élèves restant (c'est bien possible, puisqu'il y a au moins une fille dans cette classe). Ainsi, on dispose d'un groupe de n élèves, qui possède une fille (au moins), donc, comme on a supposé $P(n)$ vraie, on en déduit qu'il n'y a que des filles dans ce groupe de n élèves. On rajoute alors l'élève qui a été "prélevé" : cet élève est nécessairement une fille, sinon il est possible de refaire le même raisonnement en prélevant, dans le groupe initial de $n+1$ élèves, non plus cet élève, mais une des n filles ! En conclusion,la classe contient $n+1$ filles donc $P(n+1)$ est vérifié.
Conclusion :
$\star$ $P(1)$ est vraie.
$\star$ Pour tout $n \geq 1$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par récurrence simple sur n, on a prouvé que, pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ est vraie (i.e) que toute classe de n élèves qui possède au moins une fille n'est constituée que de filles.
Bien entendu, le résultat est **faux**. La faille tient dans la preuve de l'hérédité qui n'est possible qu'à partir de $n \geq 2$ (chercher pourquoi). Or $P(2)$ est trivialement fausse (et on n'a vérifié que $P(1)$...).

4 Autres exemples de raisonnement

Raisonnement par séparation des cas

Principe :

Pour prouver un résultat, on étudie séparément tous les cas possibles.

- Exemple 1 : «pour tout entier n, n et n^2 ont la même parité».
Rappel : on rappelle les caractérisations suivantes
Un entier N est **pair** ssi il existe un entier K tel que $N = 2K$.
Un entier N est **impair** ssi il existe un entier K tel que $N = 2K + 1$.
Autrement dit : pour tout entier $N \in \mathbb{Z}$,

$$(N \text{ est pair}) \Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{Z},\, N = 2K) \quad \text{et} \quad (N \text{ est impair}) \Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{Z},\, N = 2K + 1)$$

Preuve : soit n, un entier quelconque. On sait qu'il est soit pair, soit impair.
• 1^er^ cas : soit n est pair. Auquel cas, il existe un entier k tel que $n = 2k$. On en déduit que $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, autrement dit $n^2 = 2 \times (2k^2)$, avec $(2k^2)$ qui est un entier car k en est un. Par conséquent n^2 est pair, donc a la même parité que n.

• 2nd cas : soit n est impair. Auquel cas, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. On en déduit que $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, autrement dit $n^2 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$, avec $(2k^2 + 2k)$ qui est un entier car k en est un. Par conséquent n^2 est impair, donc a la même parité que n.
• Conclusion : en séparant les cas, on a prouvé que tout entier n a la même parité que son carré n^2.
On peut l'écrire : pour tout entier n,

$$(n \text{ est pair}) \Leftrightarrow (n^2 \text{ est pair}) \quad \text{et} \quad (n \text{ est impair}) \Leftrightarrow (n^2 \text{ est impair})$$

- Exemple 2 : «pour tout entier n, $n^3 - n$ est divisible par 3».
Remarque : on a déjà prouvé ce résultat par récurrence pour les entiers $n \geq 0$. On va le prouver maintenant par séparation des cas, en remarquant tout simplement que tout entier n est nécessairement de la forme $3k$ ou $1 + 3k$ ou $2 + 3k$ (ce résultat est du au fait que le reste, dans la division euclidienne de n par 3, est nécessairement 0, 1 ou 2).
Preuve : soit n, un entier quelconque.
• 1er cas : soit n est de la forme $n = 3k$ pour un certain entier k.
Alors $n^3 - n = (3k)^3 - 3k = 27k^3 - 3k = 3 \times (9k^3 - k)$, avec $(9k^3 - k)$ entier car k est entier.
Dans ce cas, $n^3 - n$ est bien divisible par 3.
• 2ème cas : soit n est de la forme $n = 3k + 1$ pour un certain entier k.
Alors[2] : $n^3 - n = (3k + 1)^3 - (3k + 1) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - 3k - 1 = 27k^3 + 27k^2 + 6k$, d'où $n^3 - n = 3 \times (9k^3 + 9k^2 + 2k)$, avec $(9k^3 + 9k^2 + 2k)$ entier car k est entier.
Dans ce cas, $n^3 - n$ est bien divisible par 3.
• 3ème cas : soit n est de la forme $n = 3k + 2$ pour un certain entier k.
Alors : $n^3 - n = (3k+2)^3 - (3k+2) = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 - 3k - 2 = 27k^3 + 54k^2 + 33k + 6$, d'où $n^3 - n = 3 \times (9k^3 + 18k^2 + 11k + 2)$, avec $(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2)$ entier car k est entier.
Dans ce cas, $n^3 - n$ est bien divisible par 3.
• Conclusion : en séparant les cas, on a prouvé que pour tout entier n, $n^3 - n$ est divisible par 3.

- Exemple 3 : «pour tous réels x et y, $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.»
Rappel : $\max(x, y)$ représente le plus grand des deux réels x, y.
Par exemple, $\max(-10, 2) = 2$, $\max(\sqrt{10}, \pi) = \sqrt{10}$, $\max(-5, -10) = -5$, $\max(4, 4) = 4$.
Preuve : en séparant les cas selon le signe de $x - y$.
• 1er cas : si $x \leq y$, alors $x - y \leq 0$, donc[3] $|x - y| = -(x - y)$,
d'où $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(x-y) = \frac{1}{2}(2y) = y$, qui est bien $\max(x, y)$ dans ce cas, puisqu'on a supposé $x \leq y$.
• 2nd cas : si $x > y$, alors $x - y > 0$, donc $|x - y| = x - y$,
d'où $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + (x - y)) = \frac{1}{2}(2x) = x$, qui est bien $\max(x, y)$ dans ce cas, puisqu'on a supposé $x > y$.

[2]Rappel : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
[3]On rappelle les caractérisations : pour tout réel a, $(a \geq 0) \Leftrightarrow (|a| = a)$ et $(a \leq 0) \Leftrightarrow (|a| = -a)$

• <u>Conclusion</u> : en séparant les cas, on a prouvé «$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$».
Remarque : de même, on prouverait : $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ (à vérifier).

Raisonnement par l'absurde

Principe :

Pour prouver un résultat P, on fait l'hypothèse que P est faux (i.e on suppose non(P) vrai). Puis, à partir de cette hypothèse, on déduit une absurdité (un résultat clairement faux). Nécessairement, l'hypothèse que P est faux ne tient pas, puisqu'elle entraine une absurdité. On peut alors en déduire que P est vraie.
Remarque : ce raisonnement est du au principe du tiers exclu (i.e) «une proposition est soit vraie, soit fausse» et au fait qu'une proposition vraie ne peut pas impliquer un résultat faux.

<u>- Exemple 1</u> : « $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel».
<u>Preuve</u> : nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Dans ce cas, il existerait deux entiers p et q, avec $q \neq 0$, tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, fraction que l'on prend sous sa forme *irréductible* (i.e) p et q n'ont aucun facteur commun (autre que 1 bien entendu).
De l'écriture $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, on tire, en élevant au carré les deux membres de l'égalité : $2 = \frac{p^2}{q^2}$, puis l'égalité $p^2 = 2q^2$. Cette écriture permet d'affirmer que p^2 est pair (car $p^2 = 2q^2$, avec q^2 entier car q est entier).
Mais on a déjà prouvé qu'un entier a la même parité que son carré : ceci prouve que p est également un entier pair.
Il existe donc un entier k tel que $p = 2k$: en reportant cette écriture dans une des égalité déjà écrite, on obtient $(2k)^2 = 2q^2$, puis $4k^2 = 2q^2$, on simplifie en $2k^2 = q^2$, ce qui permet d'affirmer que q^2 est pair (car il s'écrit $2k^2$ avec k^2 entier), puis que q est pair (même parité que son carré q^2).
Ainsi, on a déduit que p et q sont tous les deux pairs : mais ceci est ABSURDE, car la fraction $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avait été choisie *irréductible* ! ! ! Donc, supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel est absurde.
<u>Conclusion</u> : à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, on a prouvé $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

<u>- Exemple 2</u> : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$, mais ne s'annule pas[4] sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f garde un signe constant strict sur $\mathbb{R}$.
<u>Preuve</u> : on veut prouver « f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, ou f est strictement négative sur $\mathbb{R}$».
On peut transcire ceci en : « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)$ ».
Supposons ce résultat faux (i.e) supposons vraie la négation de ce résultat.
On suppose donc : « $(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0)$ », ce qui se traduit littéralement par :

[4] Rappel : ceci se traduit par «$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$».

il existe un réel (notons-le a) tel que $f(a)$ est négatif ou nul, *et* il existe un réel (notons-le b, car il n'est pas forcément égal à a) tel que $f(b)$ est positif ou nul. Mais comme on sait que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on est certain que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (et par conséquent $a \neq b$).
Ainsi, f est **continue** sur le **segment** d'extrémités a et b, $f(a)$ et $f(b)$ ont des **signes opposés** : par le *théorème des valeurs intermédiaires*, on peut affirmer l'existence d'un réel c "coincé" entre a et b tel que $f(c) = 0$. Et ceci est ABSURDE car on sait que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Donc, supposer que f ne garde pas un signe constant strict sur $\mathbb{R}$ a conduit à une aburdité.
Conclusion : à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, on a prouvé que, si f est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors f garde un signe constant strict.

- Exemple 3 : on va prouver « il existe une infinité de nombres premiers ».
Preuve : en raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. Dans ce cas, on pourrait les numéroter par ordre croissant, par exemple de 1 à n : $P_1 = 2$, $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, $P_4 = 7$, $P_5 = 11$, ..., jusqu'au plus grand d'entre eux, P_n.
Formons alors l'entier suivant : $N = (P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n) + 1$. Cet entier est clairement strictement plus grand que P_n, donc il ne peut pas être premier : il se factorise donc en un produit d'au moins deux nombres premiers, et par conséquent est divisible par au moins un nombre premier de la liste $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Il existe donc $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que P_i divise $N = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n + 1$.
Mais ce nombre P_i divise déjà forcément $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$, on en déduit que P_i divise 1, ce qui est ABSURDE car $P_i \geq 2$!
Conclusion : en raisonnant par l'absurde, on a montré que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Raisonnement par contraposition

Principe :

Il repose sur le fait que, $(P \Rightarrow Q)$ et $(\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$ sont deux implications équivalentes (appelées *contraposées* l'une de l'autre), (i.e)

$$(\quad P \Rightarrow Q \quad) \quad \Leftrightarrow \quad (\quad \text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P) \quad).$$

En effet, si on suppose vraie l'implication $(P \Rightarrow Q)$, alors, si Q est fausse, nécessairement P est fausse (car si P était vraie, l'implication supposée vraie entrainerait que Q est vraie !).
Ceci prouve le sens : $(\quad P \Rightarrow Q \quad) \quad \Rightarrow \quad (\quad \text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P) \quad)$.
Pour la réciproque, il suffit de remplacer Q par $\text{non}(P)$ et P par $\text{non}(Q)$ dans le résultat précédent.
On peut alors affirmer $(\quad \text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)) \quad \Rightarrow \quad (\text{non}(\text{non}((P)) \Rightarrow \text{non}(\text{non}((Q)) \quad)$,
i.e $(\quad \text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P) \quad) \quad \Rightarrow \quad (\quad P \Rightarrow Q \quad)$.
L'équivalence

$$(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$

est alors prouvée.
Un exemple : l'implication «(il pleut)$\Rightarrow$ (je prends mon parapluie)» contient exactement la même

information que «(je ne prends pas mon parapluie)$\Rightarrow$ (il ne pleut pas)».
Intérêt : on utilise ce raisonnement lorsqu'il parait plus facile de prouver (non(Q) $\Rightarrow$ non(P)) que ($P \Rightarrow Q$).

- Exemple 1 : on va prouver, pour tout entier n, « (n^2 est pair) $\Rightarrow$ (n est pair) ».
Preuve : prouver cette implication est équivalent à prouver sa contraposée, autrement dit à prouver

« (non(n est pair)) $\Rightarrow$ (non(n^2 est pair)) »

ce qui revient à prouver l'implication

« (n est impair)) $\Rightarrow$ (n^2 est impair) »

ce qui est facile (et déjà fait) : si $n = 2k+1$ avec k entier, alors $n^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$, avec $(2k^2+2k)$ entier, donc n^2 est impair si n est impair.
Conclusion : par contraposition, on a prouvé l'implication « (n^2 est pair) $\Rightarrow$ (n est pair) ».

- Exemple 2 : pour tout réel a, on va prouver l'équivalence « ($a = 0$) $\Rightarrow$ ($\forall\varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon$) », ce qui se traduit littéralement par « tout réel est nul ssi sa valeur absolue est plus petite que n'importe quelle quantité strictement positive».
Preuve : tout d'abord, rappelons que, dans une équivalence, il y a deux implications à prouver.
Preuve du 1er sens : montrons l'implication « ($a = 0$) $\Rightarrow$ ($\forall\varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon$) ». C'est le sens le plus facile ! En effet, si on suppose que $a = 0$, il est clair que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $|a| = 0 \leq \varepsilon$ (sachant que ε est strictement positif, il n'est pas faux d'affirmer que ε est positif ou nul !)
Preuve du 2nd sens : montrons l'implication « ($\forall\varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon$) $\Rightarrow$ ($a = 0$) ». Pour cela, nous allons prouver sa contraposée, qui lui est équivalente ! Cela revient donc à prouver l'implication

« (non($a = 0$))$\Rightarrow$ (non($\forall\varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon$)) »

ou encore à prouver

« ($a \neq 0$) $\Rightarrow$ ($\exists\varepsilon > 0$, $|a| > \varepsilon$) ».

Or, cette implication est presqu'évidente : en effet, si on suppose que le réel a est non nul, alors $0 < |a|$, et il existe bien au moins un réel ε strictement positif tel que $0 < \varepsilon < |a|$!
Il suffit de prendre $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$, ou encore $\varepsilon = \dfrac{|a|}{10}$, c'est bien une solution du problème !
On vient donc de prouver l'implication «(non($a = 0$)) $\Rightarrow$ (non($\forall\varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon$))», autrement dit, par contraposition, l'implication « ($\forall\varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon$) $\Rightarrow$ ($a = 0$) ».
Conclusion : par double implication, on a démontré l'équivalence, vraie pour tout $a \in \mathbb{R}$,

« ($a = 0$) $\Rightarrow$ ($\forall\varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon$) ».

Raisonnement par analyse-synthèse

Principe :

Pour justifier l'existence et parfois l'unicité d'une solution, on peut être amené à déterminer la forme de celle-ci, forme qui n'est pas nécessairement donnée dans l'énoncé. On raisonne alors par **analyse-synthèse** :

• Analyse : on suppose qu'il existe au moins une solution, et on essaie d'en tirer le maximum de renseignements la concernant.
• Synthèse : on reporte dans le problème initial *la* ou *les* solution(s) trouvée(s) précédemment, ce qui permet de déterminer s'il y a bien une solution, puis une unique ou plusieurs.
• Conclusion : on énonce le résultat démontré.

- Exemple 1 : montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire, et d'une seule façon, sous la forme $f = p + i$ avec p fonction paire et i fonction impaire.
Preuve : soit une fonction quelconque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
• Analyse : supposons qu'il existe une fonction p paire et i impaire telles que $f = p + i$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p(x)+i(x)$. Il faut utiliser les propriétés de parité des fonctions p et i. On peut en déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = p(-x)+i(-x)$, puis, avec les hypothèses sur p et i, $f(-x) = p(x)-i(x)$.
On a donc, pour l'instant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(x) - i(x)$, ce qui permet, par somme et différence de ces deux égalités, d'en tirer les expressions de p et i en fonction de f, (i.e) on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Pour l'instant, on a juste prouvé que, SI f se décompose sous la forme $f = p + i$ avec p paire et i impaire, ALORS, nécessairement, p et i sont définies à partir de f comme écrit précédemment.
A ce stade, on a juste prouvé que, si elles existent, les fonctions p et i ont nécessairement la forme ci-dessus et sont donc uniques, mais leur existence n'est pas encore démontrée.
• Synthèse : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, DEFINISSONS, à partir de f, deux fonctions p et i par les relations suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) := \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) := \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
On vérifie que c'est bien une solution du problème posé :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) + i(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$, donc on a bien l'égalité $f = p + i$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(-x) := \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = p(x)$, donc p est bien une fonction paire.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $i(-x) := \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -i(x)$, donc i est bien une fonction impaire.

Ceci prouve qu'on a bien l'existence d'une solution (et en fait d'une seule d'après la partie analyse) !
• Conclusion : par analyse-synthèse, on a démontré que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe un et un seul couple de fonctions (p, i) tel que $f = p + i$ avec p paire et i impaire.
Quelques applications : pour la fonction exponentielle, on obtient la décomposition $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$ où $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (fonctions hyperboliques).
On rappelle que la fonction nulle $\tilde{0}$ est la seule fonction paire et impaire : sa décomposition est $\tilde{0} = \tilde{0} + \tilde{0}$!
Remarque : cos est une fonction paire, sa décomposition unique est $\cos = \cos + \tilde{0}$ (où $\tilde{0}$ représente bien une fonction impaire !). Pour une fonction polynômiale, la décomposition est évidente : par exemple

pour $Q(x) = 5x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 3$, on écrit $Q(x) = (5x^4 - 7x^2 - 3) + (-2x^3 + x)$.

- Exemple 2 : déterminer les solutions f de l'équation fonctionnelle[5] suivante

$$(\star) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Réponse

• Analyse : supposons que f désigne une solution du problème $(\star)$.
En particulier, on a (avec $x = y = 0$) : $f(0)^2 - f(0) = 0$ (i.e) $f(0) \times (f(0) - 1) = 0$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Mais il n'est pas possible d'avoir $f(0) = 0$: en effet, si c'était le cas, on aurait (avec $y = 0$), pour tout réel x, $f(x)f(0) - f(0) = x + 0$, autrement dit $0 = x$ (ce qui est trivialement impossible pour tous les réels x).
Ainsi, nécessairement, $f(0) = 1$, d'où l'on tire (toujours avec $y = 0$) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 1 = x$ (i.e) $f(x) = x + 1$. Donc, si f est solution du problème, nécessairement f est cette fonction.

• Synthèse : on définit une fonction f par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. On a alors :
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y$, donc f est solution du problème $(\star)$.

• Conclusion : dans la partie analyse, on a montré que, si f est une solution du problème, elle est nécessairement de la forme $f : x \mapsto x + 1$. Dans la partie synthèse, on a vérifié que, si f est de cette forme, elle est effectivement bien solution.
On a donc prouvé, par analyse-synthèse, que le problème $(\star)$ possède une et une seule solution : la fonction $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x + 1 \end{array} \right.$.

- Exemple 3 : déterminer les solutions réelles x de l'équation (E) « $\sqrt{6 + x} = x$ ».

Réponse

• Analyse : si x est une solution de (E), alors, en élevant au carré les deux membres de l'égalité, on obtient $6 + x = x^2$. Donc x est solution de l'équation du second degré $x^2 - x - 6 = 0$, puis nécessairement $x = 3$ ou $x = -2$.

• Synthèse : on vérifie si ces réels sont bien solutions du problème.
Si $x = 3$, alors $\sqrt{6 + x} = \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3 = x$: $x = 3$ est bien une solution de (E).
Si $x = -2$, alors $\sqrt{6 + x} = \sqrt{6 - 2} = \sqrt{4} = 2 \neq x$: $x = -2$ n'est pas une solution de (E).

• Conclusion : dans la partie analyse on a prouvé que seuls 3 et -2 pouvaient être solutions de (E).
Dans la partie synthèse, on a vérifié que seul 3 était effectivement solution.
Par analyse-synthèse, on a prouvé que l'équation (E) possède une et une seule solution : $x = 3$.

- Exemple 4 : déterminer les solutions réelles x de l'équation (E) « $\sqrt{x^2 + 3} = x - 1$ ».

Réponse

• Analyse : si x est une solution de (E), alors, en élevant au carré les deux membres de l'égalité, on

[5] Il s'agit juste de trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $(\star)$ donnée.

obtient $x^2+3=(x-1)^2$ (i.e) $x^2+3=x^2-2x+1$. Donc x est solution de l'équation du premier degré $3=-2x+1$, puis nécessairement $x=-1$. Il ne peut donc y avoir qu'une seule solution au problème.

• Synthèse : on vérifie si ce réel est bien solution du problème.

Si $x=-1$, alors $\sqrt{x^2+3}=x-1$ devient $\sqrt{(-1)^2+3}=-1-1$ (i.e) $2=-2$: ABSURDE! donc $x=-1$ n'est pas une solution de (E).

• Conclusion : dans la partie analyse on a prouvé que seul -1 pouvait être solution de (E). Dans la partie synthèse, on a vérifié -1 ne pouvait pas être solution.

Par analyse-synthèse, on a prouvé que l'équation (E) ne possède pas de solution réelle.

- Exemple 5 : déterminer les solutions réelles x de l'équation (E) « $\sqrt{4x-3}=x$ ».

Réponse

• Analyse : si x est une solution de (E), alors, en élevant au carré les deux membres de l'égalité, on obtient $4x-3=x^2$. Donc x est solution de l'équation du second degré $x^2-4x+3=0$, puis nécessairement $x=1$ ou $x=3$.

• Synthèse : on vérifie si ces réels sont bien solutions du problème.

Si $x=1$, alors $\sqrt{4x-3}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1=x$: $x=1$ est bien une solution de (E).

Si $x=3$, alors $\sqrt{4x-3}=\sqrt{12-3}=\sqrt{9}=3=x$: $x=3$ est bien une solution de (E).

• Conclusion : dans la partie analyse on a prouvé que seuls 1 et 3 pouvaient être solutions de (E). Dans la partie synthèse, on a vérifié que ces deux valeurs étaient effectivement solutions.

Par analyse-synthèse, on a prouvé que l'équation (E) possède deux solutions exactement : $x=1$ et $x=3$.

- Exemple 6 : déterminer les solutions f de l'équation fonctionnelle suivante

$$(\star) \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x)+f(y)=2f(x-y)+1.$$

Réponse

• Analyse : supposons que f désigne une solution du problème $(\star)$. On en déduit (en fixant $y=0$) : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+f(0)=2f(x)+1$ (i.e) $f(x)=f(0)-1$. Ceci prouve que f est nécessairement une fonction constante! La partie synthèse va maintenant permettre de déterminer, parmi les fonctions constantes, celles qui sont effectivement solutions.

• Synthèse : soit f une fonction constante qu'on suppose égale au réel c (i.e) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=c$.

f est solution de $(\star)$ ssi $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x)+f(y)=2f(x-y)+1$ (i.e) $c+c=2c+1$ (i.e) $0=1$! Ceci est absurde! Il n'y a donc pas de solution constante au problème $(\star)$.

• Conclusion : dans la partie analyse on a prouvé que seules les fonctions constantes pouvaient être solutions de $(\star)$. Dans la partie synthèse, on a vérifié qu'aucune fonction constante ne pouvait être solution.

Par analyse-synthèse, on a prouvé que le problème $(\star)$ n'a pas de solution.