PCSI
Trigonométrie

x désigne un nombre réel.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I Rappels

1 Définition

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

Le **cosinus** du nombre x est l'abscisse du point M de $\mathcal{C}$ telle que l'angle orienté $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ admette x comme mesure (en radians). Le **sinus** est l'ordonnée de ce même point M.

La **tangente** et la **cotangente** de x sont les rapports (quand ils existent) :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ pour } x \neq 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

2 Résultats élémentaires

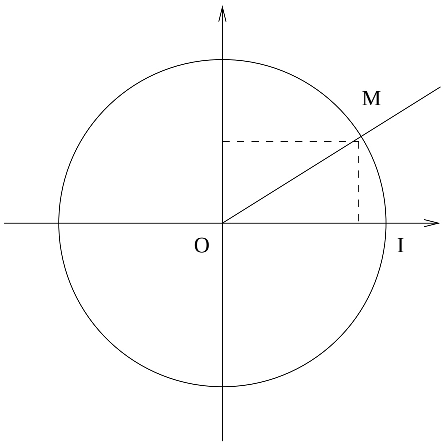
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

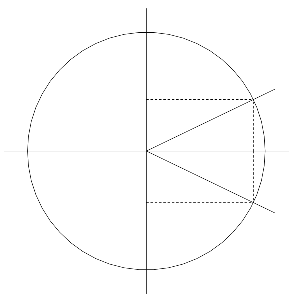
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ pour } x \neq 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



3 Angles associés

Angles opposés

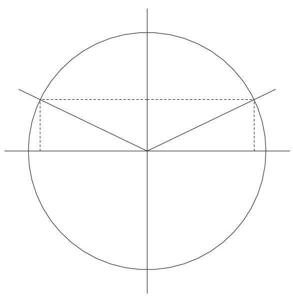


$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Angles supplémentaires

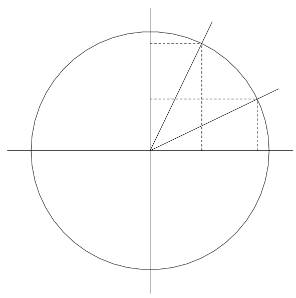


$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

Angles complémentaires

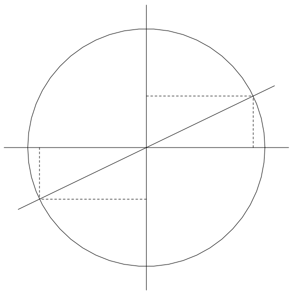


$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotan} x$$

Angles qui diffèrent de π

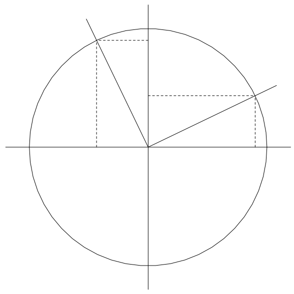


$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

Angles qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$



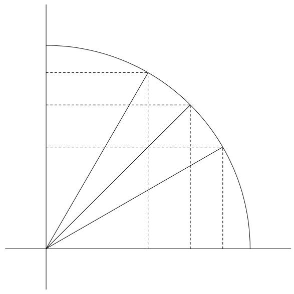
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotan} x$$

Valeurs importantes

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N D



4 Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x
\end{aligned}$$

5 Formules de duplication

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 1 - 2\sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x - 1 \\
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x
\end{aligned}$$

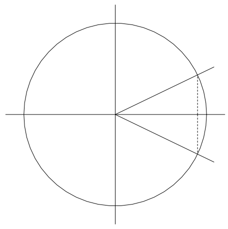
6 Formules de linéarisation

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right) \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)
\end{aligned}$$

7 Équation $\cos x = \cos a$

Les solutions de l'équation sont données par :

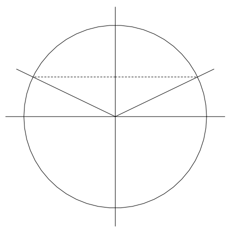
$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = a \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -a \ [2\pi] \end{cases}$$



8 Équation $\sin x = \sin a$

Les solutions de l'équation sont données par :

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x = \pi - a \ [2\pi] \end{cases}$$



II Compléments

1 Équation $\tan x = \tan a$

Les solutions de l'équation sont données par :

$$\tan x = \tan a \iff x = a\ [\pi]$$

2 Formules d'addition et de duplication

Quand cela a un sens :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

3 Expression en fonction de la tangente de l'arc moitié

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient quand cela a un sens :

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

4 Transformation de produits en sommes

$$\begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \end{aligned}$$

5 Tranformation de sommes en produits

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

III Utilisation des complexes

1 Linéarisation de $\cos^m\theta\sin^n\theta$

Utiliser les formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Développer (formule du binôme), regrouper puis faire apparaître des $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ grâce aux formules d'Euler. Exemples :

$$\begin{aligned} \cos^3\theta &= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta \\ \sin^3\theta &= -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta \\ \cos^4\theta &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta \\ \sin^4\theta &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta \\ \cos^2\theta\sin^3\theta &= \frac{1}{8}\sin\theta + \frac{1}{16}\sin 3\theta - \frac{1}{16}\sin 5\theta \end{aligned}$$

2 Expression de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Utiliser la formule de Moivre : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ (i.e) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
Développer le terme de gauche de l'égalité à l'aide de la formule du binôme, puis en identifiant les parties réelles et imaginaires, tirer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ comme une combinaison de produits de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exemples :

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

Compléments :

$1 + e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$
D'où l'on tire, en prenant les parties réelles :
$1 + \cos\theta = 2\cos^2(\frac{\theta}{2})$ et $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$