

COURBES PARAMÉTRÉES PLANES

Exercice 1 (pour rire) Construire les courbes suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1. \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} & 2. \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases} & 3. \begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{t} \\ y(t) = \frac{t^2 - 3}{t} \end{cases} & 4. \begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \\
 5. \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} & 6. \begin{cases} x(t) = \cos^2(t) \\ y(t) = \sin^2(t) \end{cases} & 7. \begin{cases} x(t) = \operatorname{ch}^2(t) \\ y(t) = \operatorname{sh}^2(t) \end{cases} & 8. \begin{cases} x(t) = \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = \operatorname{sh}(t) \end{cases} \\
 9. \begin{cases} x(t) = 2+t \\ y(t) = 3-t \end{cases} & 10. \begin{cases} x(t) = 2+t^2 \\ y(t) = 3-t^2 \end{cases} & 11. \begin{cases} x(t) = 2+\cos(t) \\ y(t) = 3-\cos(t) \end{cases} & 12. \begin{cases} x(t) = 2+\operatorname{ch}(t) \\ y(t) = 3-\operatorname{ch}(t) \end{cases} \\
 13. \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 \end{cases} & 14. \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} & 15. \begin{cases} x(t) = 1+\operatorname{th}^2(t) \\ y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} \end{cases} & 16. \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = t \end{cases} \\
 17. \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \end{cases} & 18. \begin{cases} x(t) = \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{cases} & 19. \begin{cases} x(t) = \frac{t}{|t|} \\ y(t) = \frac{\sqrt{\tan^2(\arctan t)}}{\sin(\arcsin t)} \end{cases} &
 \end{array}$$

Exercice 2

- On suppose que le mouvement d'un point $M(t)$ est circulaire (i.e OM est constant). Montrer que les vecteurs $\vec{v}(t) = \overrightarrow{M'(t)}$ et $\overrightarrow{OM(t)}$ sont orthogonaux.
- On suppose que le mouvement est à accélération centrale (i.e $\overrightarrow{\gamma(t)} = \overrightarrow{M''(t)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM(t)}$). Montrer que l'application $\varphi : t \mapsto \operatorname{Det}(\overrightarrow{OM(t)}, \overrightarrow{v(t)})$ est constante.
- On suppose que le mouvement est circulaire et à accélération centrale : montrer qu'il est uniforme (i.e $\|\overrightarrow{M'(t)}\| = \text{constante}$).

On rappelle : $(\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}))^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$ (identité de Lagrange).

Exercice 3 On considère la courbe Γ donné par $M(t) \begin{cases} x(t) = \arccos(\cos t) \\ y(t) = \arcsin(\sin t) \end{cases}$.

Comment passe-t-on du point $M(t)$ au point $M(t+2\pi)$? au point $M(-t)$? au point $M(\pi-t)$?
Construire alors Γ .

Exercice 4 On considère les fonctions $[t \mapsto x(t) = t^2(t+|t|)]$ et $[t \mapsto y(t) = t^2(|t|-t)]$.

- Simplifier les expressions de $x(t)$ et de $y(t)$. Tracer ces deux fonctions dans un même repère, t étant la variable en abscisse. Vérifier qu'elles sont de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- Tracer la courbe Γ donnée par $M(t) = (x(t), y(t))$: Γ est donc de classe C^1 . Etudier l'existence d'une tangente en $M(0)$.

Exercice 5 On considère la courbe Γ donné par $M(t) \begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

Préciser une équation cartésienne du support de Γ . Etudier les points stationnaires.

Exercice 6 Etudier les branches infinies de $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{1}{\exp(t) - 1} \end{cases}$.

Etudier avec précision leur position par rapport à Γ .

Exercice 7 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$ (classé X).

Etudier avec précision les points de rebroussement.

Exercice 8 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \tan t + \sin t \\ y(t) = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$.

Etudier avec précision les points stationnaires et les points d'inflexion.

Exercice 9 Construire la *néphroïde* $\Gamma : \begin{cases} x(t) = 3 \cos t - \cos 3t \\ y(t) = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases}$.

En donner une interprétation géométrique (on pourra remarquer que $M(t) = 3e^{it} - e^{3it}$).

Exercice 10 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sin(\frac{t}{3}) \\ y(t) = \sin(\frac{t}{2}) \end{cases}$.

Etudier avec précision les symétries ou transformations intéressantes.

Exercice 11 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$.

Etudier avec précision les asymptotes.

Exercice 12 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{t} \\ y(t) = \frac{3^t}{t(t-2)} \end{cases}$.

Etudier avec précision les asymptotes.

Exercice 13 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$.

Etudier avec précision les points doubles, la nature des branches infinies et les asymptotes.

Exercice 14 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

Etudier avec précision les points doubles. Prouver l'existence d'une parabole asymptote.

Exercice 15 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = te^t \\ y(t) = \frac{1}{t}e^t \end{cases}$.

Etudier avec précision les branches infinies et les points d'inflexion.

Exercice 16 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

Etudier avec précision les points doubles.

Exercice 17 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2 + t - 2} \\ y(t) = \frac{t^3}{t - 1} \end{cases}$.

Etudier avec précision les points doubles.

Exercice 18 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t}{1 + t^3} \\ y(t) = \frac{t}{1 + t^3} \end{cases}$.

Calculer $M(\frac{1}{t})$. Etudier avec précision l'asymptote.

Exercice 19 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \\ y(t) = \frac{t}{t} - \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

Etudier les points de rebroussement et d'inflexion. On montrera qu'il y a une parabole asymptote.

Exercice 20 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t+1}{t(t-1)} \\ y(t) = \frac{t(t+1)}{t-1} \end{cases}$.

Repérer les symétries.

Exercice 21 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2 + 1}{2t - 1} \\ y(t) = \frac{2t}{t^2} \end{cases}$.

Etudier les points de rebroussement, les branches infinies, les asymptotes.

Exercice 22 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t - \frac{1}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t^2} \end{cases}$. Etude des branches infinies, asymptotes, points doubles.

Exercice 23 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$

On étudiera avec précision les points de rebroussement.

Complément : en déduire $\Gamma' : \begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(|\sin t|) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$

Exercice 24 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y(t) = \frac{1+t^2}{2t} \end{cases}$.

Repérer les symétries (examiner $M(\frac{1}{t})$, $M(-t)$).

Exercice 25 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$ (*courbe de Lissajous*).

Préciser les points doubles.

Exercice 26 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = (1 + \cos^2 t) \sin t \\ y(t) = \sin^2 t \cos t \end{cases}$.

Exercice 27 Etudier la nature du point singulier de $\begin{cases} x(t) = t^3 + t^4 \\ y(t) = t^5 + t^7 \end{cases}$

Exercice 28 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$.

On pensera à étudier le changement de t en $\frac{1}{t}$.

Exercice 29 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 \ln t \\ y(t) = t(\ln t)^2 \end{cases}$.

Etudier avec précision le comportement asymptotique, ainsi que $M(t \rightarrow 0)$.

Exercice 30 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \exp(t) \\ y(t) = t^2 \end{cases}$.

Etudier avec précision le point d'inflexion (tangente et position).

Exercice 31 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t(1 - e^t) \\ y(t) = \ln(\operatorname{ch} t) \end{cases}$.

Etudier avec précision le point correspondant au paramètre $t = 0$.

Exercice 32 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sin^3(t) \\ y(t) = \cos(t) - \cos^4(t) \end{cases}$ (*spécial Saint-Valentin*).

Etudier avec précision les points singuliers.

Exercice 33

1. Etudier la nature des points stationnaires des courbes suivantes :

$$1. \begin{cases} x(t) = \sin 3t + 3 \sin t \\ y(t) = \sin t + \cos t \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x(t) = t^2 + t^3 \\ y(t) = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x(t) = 3t(2 - t) \\ y(t) = 4t - t^4 \end{cases}$$

2. Etudier la nature des points stationnaires des courbes suivantes :

$$1. \begin{cases} x(t) = t^4 - t^3 - t^2 \\ y(t) = t^4 + t^3 + t^2 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x(t) = t^4 + t^2 \\ y(t) = e^{t^3+3t^2} - (t^3 + 3t^2) \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x(t) = t^2 + t^3 \\ y(t) = t^4 + t^5 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x(t) = \frac{2t^2}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t} \end{cases}$$

Exercice 34 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$. On précisera l'étude du point stationnaire et des asymptotes.

Exercice 35 Construire la spirale logarithmique $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \exp(\alpha t) \cos t \\ y(t) = \exp(\alpha t) \sin t \end{cases}$ où $\alpha > 0$.

Montrer que le support de cette courbe est globalement invariant par certaines similitudes. Calculer l'angle entre \overrightarrow{OM} et la tangente à la courbe en M .

Exercice 36 Construire la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{1}{1 + \sin t} \end{cases}$.

Former, en fonction de t , l'équation de la tangente au point $M(t)$.

Quel est le coefficient directeur des tangentes à la courbe menée de l'origine du repère.

Exercice 37 Etudier l'allure, au voisinage de $t = 1$, de la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \int_0^t \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du \\ y(t) = \int_0^t \frac{u^2 - 1}{u^3 + 1} du \end{cases}$

Exercice 38 On considère la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t - \frac{1}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t^2} \end{cases}$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ soient alignés.
2. En déduire que Γ possède un point double.
3. Tracer Γ .

4. Montrer que Γ possède un unique point d'inflexion. Vérifier que le paramètre de ce point est obtenu en posant $t = t_1 = t_2 = t_3$ dans l'équation obtenue à la première question.

Exercice 39 Tracer la cycloïde $\Gamma : \begin{cases} x(t) = r \times (t - \sin t) \\ y(t) = r \times (1 - \cos t) \end{cases}$ où $r > 0$.

En donner une interprétation physique.

Exercice 40 Tracer $\Gamma : \begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 4t^3 \end{cases}$. Trouver toutes les droites qui sont à la fois tangentes et normales à Γ .

Exercice 41 La normale en un point M de la parabole d'équation cartésienne « $y = x^2$ » recoupe cette parabole en N . La parallèle en M à la tangente en N coupe la parallèle en N à la tangente en M en un point P . Déterminer le lieu de P et le tracer.

Exercice 42 On considère l'astroïde $\Gamma : \begin{cases} x(t) = a \cos^3 t \\ y(t) = a \sin^3 t \end{cases}$ où $a > 0$.

1. Tracer Γ .
2. Soit $A(t)$ et $B(t)$ les intersections de la tangente en $M(t)$ avec les axes (Ox) et (Oy) . Quelles sont les valeurs de t pour lesquelles ces points sont définis? Préciser leurs coordonnées. Montrer que la distance AB est constante.
3. Soit $\lambda \in]0, 1[$: on définit $N(t) = O + \lambda \overrightarrow{OA(t)} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB(t)}$. Quelle est la courbe décrite par N ?
4. Trouver le lieu (C) des points d'où on peut mener deux tangentes à Γ orthogonales. (C) est appelée courbe orthoptique à Γ .
5. Etudier et tracer (C) sur la même figure que Γ . Etudier leurs points d'intersection.

Exercice 43 On veut représenter l'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 e^y = y^2 e^x\}$.

A l'aide du paramétrage $y = tx$, montrer que Γ est la réunion d'une droite et de la courbe (C) :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2 \ln |t|}{t-1} \\ y(t) = \frac{2t \ln |t|}{t-1} \end{cases} . \text{ Comparer } M(t) \text{ et } M\left(\frac{1}{t}\right). \text{ Tracer } (C) : \text{ on étudiera avec précision les tangentes}$$

en $M(-1)$ et $M(1)$. On appellera α l'unique zéro de y' sur $] -1, 0[$ et on ne cherchera pas sa valeur exacte.

Exercice 44 Soit \mathcal{C} , la courbe d'équation cartésienne $\ln(x+y) = x-y$.

Introduire le paramètre $t = x+y$, paramétrer \mathcal{C} , puis tracer \mathcal{C} .

Exercice 45 Soit \mathcal{C} , la courbe d'équation cartésienne $y \ln\left(\frac{y}{x}\right) = x^2$.

Introduire le paramètre $t = \frac{y}{x}$, paramétrer \mathcal{C} , puis tracer \mathcal{C} .

Exercice 46 Dessiner la courbe d'équation cartésienne « $x^3 + y^3 = 3xy$ » (*Folium de Descartes*) : on posera $y = tx$. Vérifier qu'il existe un axe de symétrie.

Exercice 47 Construire $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ (*Folium de Descartes*).

Exercice 48 Déterminer l'ensemble des points de rebroussement des courbes paramétrées d'équation $\begin{cases} x(t) = 2t + \frac{a}{t^2} \\ y(t) = t^2 - \frac{2b}{t} \end{cases}$, pour (a, b) décrivant \mathbb{R}^2 . Si $a = b$, déterminer les points d'inflexion.

Exercice 49 Soit $a > b > 0$. On considère l'ellipse $(C) \ll \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \gg$.

1. Paramétrer simplement l'ellipse (C) .

2. Tracer, dans un même repère, (C) et la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t \\ y(t) = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \end{cases}$.

On pourra montrer plus tard que Γ est le lieu des centres de courbure de (C) : tenter d'en déduire une construction approchée d'une ellipse à l'aide de quatre arcs de cercle.

3. Montrer que la distance de O à Γ vaut $(a - b)$.

Exercice 50 Tracer $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t - \text{th}(t) \\ y(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)} \end{cases}$.

On note $A(t)$ le point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente au point $M(t)$ de Γ . Préciser la nature du mouvement du point A , ainsi que la valeur de la distance AM (*tractrice*).

Exercice 51

On considère la famille des courbes C_m définies paramétriquement par $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) + m \sin(t) \\ y(t) = \sin^3(t) + m \cos(t) \end{cases}$.

1. Pour quelles valeurs de m les courbes C_m admettent-elles des points stationnaires ?
2. Trouver des équations paramétriques de l'ensemble Γ des points stationnaires et représenter Γ .
3. Montrer que, pour $|m| < \frac{3}{2}$, ces points stationnaires sont des points de rebroussement pour C_m .

Exercice 52 Représenter \mathcal{C} , courbe donnée par sa représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \tan(t) + \sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{\cos(t)} \end{cases}$.

On étudiera avec précision la nature des éventuels points singuliers et les branches infinies (asymptotes et position par rapport à celles-ci si nécessaire).

Exercice 53 Tracer $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \cos(t) - \sin(t) \\ y(t) = 2 \cos(t) \end{cases}$.

Montrer que les tangentes en des les points stationnaires sont concourantes en O .

Exercice 54 Tracer $\Gamma : \begin{cases} x(t) = 4t^3 \\ y(t) = 3t^4 \end{cases}$. Puis déterminer une équation de l'orthoptique de Γ (i.e)

l'ensemble des points M d'où l'on peut mener 2 tangentes perpendiculaires à Γ .

On trouvera : $x^2 + (1 - y)^2(1 + y) = 0$.

Exercice 55 Soit \mathcal{C} , le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Pour tout point $M(t)$ de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ de \mathcal{C} , donner une équation cartésienne (normale....) de la tangente à \mathcal{C} en $M(t)$.
2. Soit le point A , de coordonnées $(1, 0)$: déterminer le lieu des projetés orthogonaux de A sur les tangentes à \mathcal{C} . On notera Γ cette courbe : elle s'appelle podaire de \mathcal{C} par rapport au point A . Tracer cette courbe Γ .

Exercice 56 Soit $A(t) : \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ et $B(t) : \begin{cases} x(t) = \cos(-2t) \\ y(t) = \sin(-2t) \end{cases}$.

1. Déterminer les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de $S(t)$, le symétrique de $B(t)$ par rapport au point $A(t)$. Tracer \mathcal{C} , l'ensemble des points $S(t)$.
2. Montrer que la droite $\Delta(t) = (A(t)B(t))$ est la tangente à \mathcal{C} au point $S(t)$: on dit que la courbe \mathcal{C} est l'enveloppe de la famille des droites $\Delta(t)$.

Exercice 57 Soit $\mathcal{C}_{a,b}$, la courbe donnée par $\begin{cases} x(t) = t^2 - at \\ y(t) = t^3 - bt \end{cases}$, où a, b sont des paramètres réels.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et b , pour que cette courbe admette un point stationnaire S .
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et b , pour que cette courbe admette un point double D .

Exercice 58 (*Podaires d'une parabole*) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la parabole (P) donnée par ses équations paramétriques $x(t) = \frac{t^2}{2}$ et $y(t) = t$. On se donne par ailleurs un point A de coordonnées (a, b) .

1. Si $M(t)(x(t), y(t))$ est un point de (P) , déterminer l'équation de la tangente D_t en $M(t)$ à (P) , puis les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de la projection orthogonale $H(t)$ de A sur cette tangente D_t . On trouvera

$$X(t) = \frac{(2a - 1)t^2 + 2bt}{2(1 + t^2)}, \quad Y(t) = \frac{t^3 + 2at + 2b}{2(1 + t^2)}.$$

Lorsque t décrit \mathbb{R} , le point $H(t)$ décrit une courbe Γ_A appelée *podaire de (P) pour le point A* .

2. *Étude de quelques cas particuliers*

(a) On suppose $(a, b) = (3, 0)$. Étudier l'intersection de Γ_A et de (P) .

Montrer que les courbes ont mêmes tangentes aux points d'intersection.

Tracer Γ_A et (P) sur un même schéma, en prenant soin de positionner correctement ces deux courbes l'une par rapport à l'autre (se rappeler la définition d'une podaire).

(b) Qui est Γ_A si $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$?

En déduire une construction de la tangente en un point donné de la parabole (P) .