COURBES PLANES EN COORDONNÉES POLAIRES

Exercice 1 Représenter rapidement la courbe définie par $\rho(\theta) = \sin(2\theta)$.
On pourra, entre autres, remarquer la relation $\rho(\frac{\pi}{4} - h) = \rho(\frac{\pi}{4} + h)$.

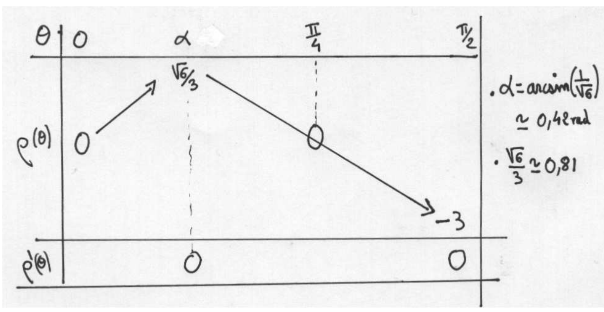
Exercice 2 Représenter la courbe définie par $\rho(\theta) = \dfrac{\cos(3\theta)}{\cos(2\theta)}$ en étudiant uniquement le signe de $\rho(\theta)$. Préciser les droites asymptotes.

Exercice 3 Soit Γ, une courbe définie par son équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$ ($\theta \in \mathbb{R}$). Pour chacune des propriétés suivantes, déterminer l'ensemble le plus petit sur lequel on peut se contenter d'étudier ρ, et les transformations à appliquer pour obtenir le tracé complet du support de Γ.

1. ρ est 2π-périodique et paire.
2. ρ est impaire et $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$.
3. ρ est π-périodique et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\frac{\pi}{2} + \theta) = \rho(\frac{\pi}{2} - \theta)$.
4. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$.
5. ρ est impaire et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\theta + \frac{\pi}{3}) = -\rho(\theta)$.
6. ρ est 3π-périodique et $\rho(2\pi - \theta) = \rho(\theta)$.
7. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta) + 1$.
8. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\theta + 2\pi) = 2\rho(\theta)$.

Exercice 4 Prouver qu'une équation polaire d'un cercle $\mathcal{C}$, de rayon $R > 0$ et passant par l'origine, est la forme : $\rho(\theta) = 2R\cos(\theta - \theta_0)$.
Application : tracer les courbes définies par $\rho_1(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$, puis $\rho_2(\theta) = \sin(\theta) - \sqrt{3}\cos(\theta)$.

Exercice 5 Un élève distrait (si, si, ça existe) a égaré le début de ses copies : il s'agissait d'étudier une courbe $\mathcal{F}$ définie en coordonnées polaires, donnée par l'expression $\rho(\theta) = ...$(énoncé perdu, lui aussi !). Il ne lui reste que la dernière feuille, sur laquelle on peut lire les informations :
ρ est définie sur $\mathbb{R}$, ρ est 2π-périodique, ρ est impaire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$, puis le tableau de signes-variations suivant :



Tracer la totalité du support de $\mathcal{F}$.

Exercice 6 Tracer la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 3\cos(\theta)\sin(2\theta)$. Montrer qu'on peut restreindre l'étude à $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. L'étude de $\rho'(\theta)$ permet d'être plus précis.

Exercice 7 Tracer les courbes Γ d'équation polaire :

1. $\rho(\theta) = \sin^3(\frac{\theta}{3})$.
2. $\rho(\theta) = \sin(\frac{2\theta}{3})$.
3. $\rho(\theta) = 2\cos(\theta) - \cos(2\theta)$ (points multiples).
4. $\rho(\theta) = \cos^2(\theta) + \cos(2\theta)$. Vérifier qu'on peut restreindre l'étude à $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
5. $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}$.
6. $\rho(\theta) = \sin(\theta) + \cos(2\theta)$: préciser les points multiples (rappel : on résout $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$).
7. $\rho(\theta) = 1 - \tan(2\theta)$. Remarquer $\rho(\theta + \frac{\pi}{2}) =?$. Etudier avec soin les asymptotes.
8. $\rho(\theta) = 1 + \tan(\theta)$. Etudier avec soin les asymptotes.
9. $\rho(\theta) = \tan(\theta)$.
10. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{4 + \cos(3\theta)}$. Préciser les points d'inflexion si c'est possible (*Barbatruc !*).
11. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{1 + \cos(2\theta)}$.
12. $\rho(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\tan(2\theta)}$.
13. $\rho(\theta) = \sin(2\theta)$.
14. $\rho(\theta) = \cos^2(\theta)$. Préciser les points à tangentes horizontales.
15. $\rho(\theta) = \sin(2\theta + \varphi)$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.
16. $\rho(\theta) = \cos(5\theta)$ (il parait que ça porte chance...) .
17. $\rho(\theta) = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)$.
18. $\rho(\theta) = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$.
19. $\rho(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.
20. $\rho(\theta) = \dfrac{\theta}{\theta - 1}$. Préciser les asymptotes et les points multiples.
21. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta) - \cos(2\theta)}$. Etudier les asymptotes, inflexions, points doubles.
22. $\rho(\theta) = \tan(\frac{\theta}{2}) + 1$. Montrer que Γ a un point double en lequel les tangentes sont orthogonales.
23. $\rho(\theta) = \ln(\theta)$.
24. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$. Intersection de Γ avec le cercle $\mathcal{C}(O, 2\sqrt{2})$.
25. $\rho(\theta) = \cos\theta + \cos(\frac{\theta}{2})$.

26. $\rho(\theta) = \dfrac{\ln(1+\theta)}{(1+\theta)^2}$.
27. $\rho(\theta) = \cos(\theta) - \sin(\theta)$.
28. $\rho(\theta) = \cos(3\theta) - 2$.
29. $\rho(\theta) = \dfrac{2\cos(\theta)}{2+\sin(\theta)}$.
30. $\rho(\theta) = \tan(\frac{\theta}{3})$.
31. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{1-\tan(\theta)}$. Préciser l'asymptote.
32. $\rho(\theta) = \dfrac{2}{\cos(\theta) - 2\sin(\theta)}$ (hé, hé !).
33. $\rho(\theta) = \cos(3\theta)$.
34. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{1+\tan\theta}$.

Exercice 8 Reconnaître la courbe donnée par $\rho(\theta) = \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{2\cos^2\theta - 1}$.

Indication : vérifier que $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$.

Exercice 9 Reconnaître la courbe donnée par $\rho(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$.

Indication : pour une fois que ça tourne rond...

Exercice 10

1. Soit Γ_1 et Γ_2, deux courbes données par leurs équations polaires $\rho_1(\theta) = ...$ et $\rho_2(\theta) = ...$, où ρ_1 et ρ_2 sont des fonctions 2π-périodiques. Vérifier que chercher les points d'intersection de Γ_1 et Γ_2, autres que O, revient à résoudre les équations en θ : $\rho_1(\theta) = \rho_2(\theta)$ et $\rho_1(\theta+\pi) = -\rho_2(\theta)$.
2. Déterminer $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ lorsque $\rho_1(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$ et $\rho_2(\theta) = 2\cos(\theta)$.
3. Déterminer $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ lorsque $\rho_1(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$ et $\rho_2(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}$.
4. Déterminer $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ lorsque $\rho_1(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ et $\rho_2(\theta) = 2\cos(\theta)$.

Exercice 11

1. Tracer Γ, d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$.
2. Déterminer l'intersection de Γ avec le cercle $\mathcal{C}(O,1)$.
3. Déterminer l'intersection de Γ avec le cercle $\mathcal{C}_1(O,\frac{1}{2})$.
4. Déterminer l'intersection de Γ avec le cercle $\mathcal{C}_2(O,1+\sqrt{3})$.
5. Déterminer l'intersection de Γ avec le cercle $\mathcal{C}_3(A,1)$ où A est de coordonnées cartésiennes $(1,0)$.

Exercice 12 Tracer les courbes d'équation polaire :

1. $\rho(\theta)=\theta$. 2. $\rho(\theta)=\dfrac{1}{\theta}$. 3. $\rho(\theta)=\ln(\theta)$. 4. $\rho(\theta)=\dfrac{e^\theta}{\theta-1}$. 5. $\rho(\theta)=e^{\frac{1}{2\sin(\theta)}}$.

Exercice 13 Tracer la courbe définie en polaires par $\rho(\theta)=\dfrac{a\cos(\theta)}{\theta}$.
On montrera que les tangentes en des points alignés avec l'origine sont concourantes.

Exercice 14 Tracer Γ : $\rho(\theta)=\cos^3(\theta)-\sin^3(\theta)$.
Quels sont les points de Γ où la tangente est de pente 1 ?
Indication : on remarquera cela revient à que $\theta+V=\dfrac{\pi}{4}[\pi]$, avec $\tan V=\dfrac{\rho}{\rho'}$ et $\rho'=$?.

Exercice 15 Soit (D) la droite d'équation $x=-1$ et (C) le cercle de centre $(1,0)$, de rayon 1. Une droite passant par O coupe (D) en un point P et coupe (C) en un point Q. On note Γ le lieu du milieu du segment $[P,Q]$. Déterminer l'équation polaire de Γ. Puis tracer Γ.

Exercice 16 A l'aide de coordonnées polaires, tracer la courbe Γ d'équation cartésienne : $2xy(x^2+y^2)=x^2-y^2$.

Exercice 17 On cherche l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z^2-1|=1$. Montrer que cet ensemble est la lemniscate de Bernoulli d'équation polaire $\rho(\theta)=\sqrt{2\cos(2\theta)}$. Le représenter.

Exercice 18 On note Γ la courbe d'équation polaire $\rho(\theta)=-1+\tan(\frac{\theta}{2})$.

1. Tracer Γ.
2. Toute droite Δ passant par O coupe Γ en deux points M_1 et M_2 : quel est le lieu des milieux I de $[M_1M_2]$? Rem : on trouvera la droite d'équation $\rho(\theta)=\frac{1}{\sin\theta}$.

Exercice 19 On fait rouler, sans glisser, un cercle de rayon 1 sur un cercle de rayon 1 : chercher le lieu décrit par un point fixé sur le cercle roulant.
On trouvera $x(t)=\cos(t)(1+\cos t)$, $y(t)=\sin(t)(1+\cos t)$, en choisissant correctement t.

Exercice 20 On note Γ, la courbe d'équation polaire $\rho(\theta)=\sin^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$.

1. Etudier et représenter la courbe Γ.
2. Soit $V(\theta)$, l'angle que fait la tangente à Γ au point $M(\theta)$ avec la droite (OM).
   Montrer que $V(\theta)=\dfrac{\theta}{3}[\pi]$.
3. Une droite passant par l'origine recoupe Γ en trois points. Démontrer que les tangentes à Γ en ces trois points forment un triangle équilatéral.

Exercice 21 On note (C) la cardioïde d'équation polaire $\rho(\theta)=1+\cos\theta$.

1. Tracer (C).
2. Montrer que (C) admet trois tangentes de direction donnée : on note M_1, M_2, M_3 les trois points de contact.
3. Vérifier que l'isobarycentre des points M_1, M_2 et M_3 est toujours le point $(\frac{1}{2}, 0)$.
4. Montrer que l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ est constante (on trouvera $\frac{9\sqrt{3}}{16}$).
5. On note $A = M(0)$ et P, Q d'intersection de (C) et d'une droite passant par O. Montrer que l'isobarycentre de APQ est situé sur le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon $\frac{1}{3}$.
6. Montrer que $V = \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. En déduire une méthode de construction des tangentes.

Exercice 22 On note Γ la cardioïde d'équation polaire $\rho(\theta) = 1+\cos\theta$. Une droite variable passant par O coupe Γ en deux points, P et Q. Déterminer le lieu du milieu I du segment $[PQ]$.
Indication : on trouve un cercle passant par l'origine. En déduire un procédé mécanique permettant de construire une partie de la cardioïde.

Exercice 23 On note (C) la cardioïde d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$.

1. Tracer (C).
2. Calculer l'angle V (angle de la tangente dans le repère tournant). En déduire les points de (C) ayant une tangente verticale ou horizontale.
3. Soit P et Q, deux points de (C) tels que O, P et Q soient alignés. Montrer que les tangentes en P et Q sont orthogonales. Déterminer le lieu de l'intersection I de ces tangentes.
4. Déterminer le lieu (E) du symétrique de O par rapport à une tangente variable à (C).

Exercice 24 La *podaire* d'un point fixe par rapport à une courbe paramétrée est la courbe formée par la projection orthogonale de ce point sur les tangentes à la courbe.
Montrer que la podaire de l'origine par rapport à une spirale logarithmique ($\rho(\theta) = ae^{m\theta}$) est une spirale semblable à la première (c'est à dire image par une similitude).

Exercice 25 Quelles sont les courbes Γ du plan telles qu'en tout point M de Γ, la tangente est orthogonale à la droite (OM) ?

Exercice 26 Déterminer et tracer les courbes dont la tangente en tout point M fait un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Exercice 27 Donner les différentes allures de la courbe d'équation $\rho(\theta) = 2\cos(\theta) + a$, suivant les valeurs du paramètre $a \geq 0$.

Exercice 28 On considère la courbe Γ donnée par $M(t)\left\{\begin{array}{l} x(t)=a\cos^3(t) \\ y(t)=a\sin^3(t)\end{array}\right.$ où $a>0$ est un paramètre fixé.

1. Tracer la trajecoire de cet arc paramétré *(astroïde)*.
2. Donner une équation cartésienne (simplifiée) de la tangente à Γ en $M(t)$.
3. Cette tangente recoupe les axes (Ox) et (Oy) en deux points $A(t)$ et $B(t)$: montrer que la longueur $A(t)B(t)$ est constante.
4. Déterminer le lieu $\mathcal{P}$ de $P(t)$, projeté orthogonal de l'origine O sur la tangente en $M(t)$ (*podaire* de Γ par rapport à O).
5. Déterminer une équation polaire simple de ce lieu $\mathcal{P}$, et le tracer (rappel : $\cos(t)=\sin(\frac{\pi}{2}-t)$).

Exercice 29 *(tiré de E3A PC 2005)* Soit Γ, la courbe d'équation polaire $\rho(\theta)=1+2\cos(3\theta)$: $M(\theta)$ représente le point de coordonnées polaires $(\rho(\theta),\theta)$.

1. On note Γ' la courbe d'équation polaire $\rho(\theta)=1+2\cos(3\theta)$ pour $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{3}]$.
   (a) Déterminer les valeurs de θ dans $[0,\dfrac{\pi}{3}]$ pour lesquelles $\rho(\theta)=0$.
   (b) Calculer ρ' et déterminer les valeurs de θ dans $[0,\dfrac{\pi}{3}]$ pour lesquelles $\rho'(\theta)=0$.
   (c) Expliciter les tangentes à Γ' aux points $M(0)$, $M(\dfrac{2\pi}{9})$ et $M(\dfrac{\pi}{3})$.
   (d) Représenter Γ' (faire apparaître les tangentes trouvées précédemment).
2. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ et τ la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Pour $\theta\in\mathbb{R}$, exprimer l'image par σ du point $M(\theta)$. En déduire l'équivalence
   $$M(\theta)\in\Gamma \Leftrightarrow \sigma(M(\theta))\in\Gamma.$$
   (b) Pour $\theta\in\mathbb{R}$, exprimer l'image par τ du point $M(\theta)$. En déduire l'équivalence
   $$M(\theta)\in\Gamma \Leftrightarrow \tau(M(\theta))\in\Gamma.$$
   (c) Représenter Γ : on utilisera σ pour représenter $M(\theta)$ pour $\theta\in[0,\dfrac{2\pi}{3}]$, puis τ et τ^{-1} pour conclure.
3. Quelle est l'intersection de Γ avec le cercle $\mathcal{C}$ centré à l'origine et de rayon 3 ?
4. Quelle est l'intersection de Γ avec le cercle $\mathcal{C}'$ centré à l'origine et de rayon 1 ?
5. Quelles sont les rotations centrées à l'origine qui laissent Γ globalement invariante ?
6. Quelles sont les symétries orthogonales d'axe contenant l'origine O qui laissent Γ globalement invariante ?

Exercice 30 Tracer une courbe Γ ayant l'allure de $y=(x-1)^3$ autour du point $x=1$. Montrer qu'il n'est pas possible d'obtenir ce type d'allure avec une équation polaire $[\theta\mapsto\rho(\theta)]$, ρ dérivable.