
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU 2ND ORDRE

À COEFFICIENTS CONSTANTS

Équations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants

Exercice 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = e^x(\sin(x) + i \cos(x))$: on a donc $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Déterminer un complexe a tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = ie^{ax}$.
2. Calculer $\varphi'(x)$.

Exercice 2 On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sin(x) + i \cos(2x)$ et $f(x) = e^{\varphi(x)}$. On a donc $\varphi, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Préciser $\operatorname{Re}(f(x))$ et $\operatorname{Im}(f(x))$.
2. Calculer $f'(x)$.

Exercice 3 Trouver la(les ?) solutions de « $y'' - 3y = \sin x$ » vérifiant $y'(0) = y(0) = 0$.

Exercice 4 Trouver la(les ?) solutions de « $y'' + \pi^2 y = 0$ » :

1. vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$.
2. vérifiant $y(0) = y(1) = 0$.
3. vérifiant $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

Exercice 5 Résoudre (E) « $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sh}(x)$ » avec $y(0) = \frac{13}{12}$ et $y'(0) = -\frac{29}{12}$.

Exercice 6 Résoudre (E) « $y'' + y' - 2y = xe^{-2x}$ » avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 7 On considère l'équation différentielle « $y'' + a^2 y = 0$ ». Comment faut-il choisir a pour qu'elle admette une solution non identiquement nulle et qui s'annule pour $x = 0$ et $x = \pi$.

Exercice 8 Peut-on prévoir le nombre de solutions de l'équation « $y'' - 2y' + 5y = 10$ » vérifiant les conditions $y(0) = y(\pi) = 0$? Le vérifier en cherchant effectivement ces solutions.

Exercice 9 Déterminer, en moins de 10 secondes, les solutions réelles des équations suivantes :

1. « $y'' + y = 1$ »
2. « $y'' - y = 1$ »
3. « $y'' + 4y = 1$ »
4. « $y'' - 4y = 1$ »
5. « $y'' + 2y = 2x$ »
6. « $y'' - 2y = 2x$ »
7. « $y'' + y = 2\text{ch}(x)$ »
8. « $y'' - y = -x^2 + 2$ »
9. « $y'' - y = -x^2 + 3$ »
10. « $y'' - y = \cos(x)$ »
11. « $y'' - 9y = \sin(x)$ »
12. « $y'' - 2y = \sin(2x)$ »
13. « $y'' + y = (4x^2 + 3)e^{x^2}$ » (3=2+1...)

Exercice 10 Donner une équation différentielle ayant :

1. ($x \mapsto e^{2x}$) et ($x \mapsto e^{-x}$) comme solutions.
2. ($x \mapsto e^x$) et ($x \mapsto xe^x$) comme solutions.
3. ($x \mapsto 1$) et ($x \mapsto x$) comme solutions.
4. ($x \mapsto \cos(3x)$) et ($x \mapsto \sin(3x)$) comme solutions.
5. ($x \mapsto e^{2x} \cos x$) et ($x \mapsto e^{2x} \sin x$) comme solutions.

Exercice 11 Soit ω et ω_0 , deux réels strictement positifs et distincts. Déterminer la(les?) solution(s) de l'équation différentielle « $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$ » avec la condition initiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 12 Résoudre l'équation différentielle « $(E)y'' + 2y' + 2y = \sin(mx)e^{-x}$ » en fonction du paramètre réel m .

Exercice 13 Soit ω un réel et l'équation « $y'' + y' + y = \sin(\omega x)$ ».

Trouver la(les?) solutions vérifiant $y'(0) = y(0) = 0$.

Exercice 14 Déterminer les solutions complexes de : « $y'' - 4y' + 4y = e^{mx}$ », $m \in \mathbb{C}$.

Exercice 15 Résoudre l'équation différentielle (E) « $y'' + 2y' = 3$ » :

1. d'abord en posant $z = y'$.
2. puis avec une autre méthode.

Exercice 16 Résoudre les équations différentielles suivantes

1. « $y'' + 2y' - 3y = e^{-2x}$ »
2. « $y'' + 4y' - 5y = 2e^x$ »
3. « $y'' - 2y' + y = 6xe^x$ »
4. « $y'' + 4y = x^2 - x + 1$ »
5. « $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$ »
6. « $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$ »
7. « $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ »
8. « $y'' + y' = 4x^2e^x$ »
9. « $y'' - y' - 2y = x^2e^{-2x}$ »
10. « $y'' + 2y' + y = e^{3x}$ »
11. « $y'' - 2y' + 2y = xe^x$ »
12. « $y'' - y = (4x + 2)e^x$ »
13. « $y'' - 4y' + 13y = 10 \cos(2x) + 25 \sin(2x)$ »
14. « $y'' - y' - 6y = (15x^2 - 6x + 5)e^{-2x}$ »
15. « $y'' + y' + y = 1$ »
16. « $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x$ »
17. « $y'' + y = \operatorname{sh}(x)$ »
18. « $y'' - 3y' + 2y = 2\operatorname{ch}(x)$ »
19. « $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin(x)$ »
20. « $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x$ »
21. « $y'' + y = \cos(x)$ »
22. « $y'' + 2y' + y = \sin^2(x)$ »
23. « $y'' - 4y' + 4y = e^x + 5 \sin x$ »
24. « $y'' - 4y' + 4y = \cos(2x)$ »
25. « $y'' + 2y' + 5y = \cos 2x + \sin 2x$ »
26. « $y'' + 2y' + y = e^x \sin x$ »
27. « $y'' + y = \cos^3(x)$ »
28. « $y'' + 3y' + 2y = x \operatorname{sh}(x)$ »
29. « $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin x$ »
30. « $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \cos x$ »
31. « $y'' + y = x \sin x$ »
32. « $y'' + y' + y = e^x$ »
33. « $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + \sin(x)$ »
34. « $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} + \sin(3x)$ »

35. « $y'' + 2y' + y = 2x \cos(x) \operatorname{ch}(x)$ »

36. « $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ »

37. « $y'' - 2y' + 6y = x - 5$ »

38. « $y'' - 2y' + 6y = e^x(x - 5)$ »

39. « $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ »

40. « $y'' + y = \cos(2x)$ »

41. « $y'' + y = \cos(x)$ »

42. « $y'' + y = \cos(\omega x)$ »

Exercice 17 En Physique, on rencontre souvent des équations différentielles du type

$$(E) \quad \left\langle y'' + \frac{\omega_0}{q} y' + \omega_0^2 y = \mu \cos(\omega t) \right\rangle.$$

La variable t représente *le temps*, ω_0 est la *pulsation propre* du système, ω est la *pulsation de la sollicitation extérieure* (par exemple la pulsation du générateur de tension si l'équation est celle d'un circuit RLC). Enfin, q est fréquemment appelé *facteur de qualité* du système.

On supposera ω , ω_0 , q , μ réels avec $q > 0$ et $\omega_0 > 0$.

1. Résoudre l'équation homogène associée : il faudra discuter en fonction de la place de q par rapport à $\frac{1}{2}$.
2. Vérifier que, dans tous les cas, la solution de l'équation sans second membre tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ (régime transitoire).
3. Résoudre l'équation complètement.
4. Quelle est la solution de l'équation (E') obtenue en remplaçant le second membre de (E) par $\mu \sin(\omega t)$? On peut donner une réponse complète sans refaire tous les calculs...

Exercice 18 Un parachutiste de masse m en chute libre est soumis à la force de pesanteur $m.g$ et à une force de frottement proportionnelle à la vitesse. On note $z(t)$ l'altitude du parachutiste à l'instant t . L'altitude $z(t)$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$m.z'' = -k.z' - m.g.$$

On donne les valeurs numériques : $g = 10.m.s^{-2}$, $m = 70.kg$, $k = 7.kg.s^{-1}$.

1. Déterminer la vitesse limite théorique du parachutiste. Sachant que le parachutiste quitte l'avion à vitesse nulle, déterminer le temps mis pour atteindre 90% de cette vitesse limite, ainsi que la distance parcourue pendant ce temps. Même question avec 99% de cette vitesse limite.
2. Lorsque le parachute se déploie, le coefficient de frottement est multiplié par 20. Le parachutiste doit arriver au sol avec une vitesse inférieure à $6.m.s^{-1}$. En supposant qu'il chute à la vitesse

limite au moment de l'ouverture du parachute, déterminer l'altitude maximale d'ouverture du parachute (le parachute met 2 secondes à se déployer).

Exercice 19 Trouver l'équation de la courbe intégrale de l'équation différentielle « $(E) : \ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^{2t} - 2e^t$ » passant par le point $A(0, 1)$ et admettant en ce point une tangente de coefficient directeur égal à -1 .

Exercice 20 Pour tout paramètre m réel, on considère l'équation

$$(E_m) \ll y'' + (1 - 2m)y' - 2my = e^{2x} \gg.$$

1. Quels sont les différents cas à traiter ?
2. Pour m au voisinage de 1, résoudre complètement (E_m) .

Dans ce cas, exhiber la solution y_m vérifiant $y_m(0) = y'_m(0) = 0$.

Vérifier que, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, on a $\lim_{m \rightarrow 1} y_m(a) = y_1(a)$.

Exercice 21

Déterminer, si elle existe, la constante a telle que l'équation « $y'' + ay = 4x^2e^{x^2}$ » admette une solution du type $y(x) = ke^{x^2}$ (k constante). Résoudre, dans ce cas, l'équation différentielle.

Exercice 22 Résoudre l'équation différentielle $(E) y'' - 4y' + 4y = d(x)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$, puis $d(x) = 4e^{-2x} - 5e^{2x}$, puis $d(x) = 10\text{ch}(2x) + \frac{1}{2}\text{sh}(2x)$.

Exercice 23 Résoudre l'équation différentielle $(E) y'' + 6y' + 9y = d(x)$ lorsque $d(x) = (x^2 + 1)e^{-3x}$, puis $d(x) = \cos(x)$, puis $d(x) = 2(x^2 + 1)e^{-3x} + 50\cos(x)$.

Compléments

Exercice 24 Déterminer les couples de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de l'équation différentielle « $y'' + ay' + by = 0$ » soit bornée sur \mathbb{R} .

Exercice 25 Déterminer les couples de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de l'équation différentielle « $y'' + ay' + by = 0$ » soit bornée sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 26 Résoudre, sur \mathbb{R} , l'équation différentielle : « $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$ » (hmmm.....).

Exercice 27 Résoudre, sur \mathbb{R} , l'équation différentielle : « $y^{(3)} - 3y'' + 2y' = 0$ ».

Exercice 28 Résoudre, sur \mathbb{R} , l'équation différentielle : « $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 4y'' = 2(x-1)e^x$ ».

Exercice 29 Résoudre l'équation (E) « $y'' + y = |x|$ » sur $I_1 =]-\infty, 0[$, puis sur $I_2 =]0, +\infty[$.
L'équation (E) possède-t-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

Exercice 30 Trouver les solutions sur \mathbb{R} , si c'est possible, de : « $y'' + y = e^{-|x|}$ ».

Exercice 31 On cherche à résoudre (E) « $y'' + y = \tan x$ » sur $I =]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Résoudre l'équation homogène associée. On écrira l'ensemble des solutions sous la forme $\text{vect}(g_1, g_2)$.
2. Chercher une solution de (E) sous la forme $g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$, où λ_1 et λ_2 sont des fonctions réelles dérivables sur I et vérifiant la condition $\lambda_1' g_1 + \lambda_2' g_2 = 0$. On ne cherchera pas à justifier l'existence de λ_1 et λ_2 en général.
3. Résoudre (E).
4. Résoudre « $y'' + 2y' + y = e^{3x}$ » en utilisant la même méthode.

Exercice 32 On considère le système différentiel :
$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 6y(t) + e^t \\ y'(t) = 4x(t) - 5y(t) + t \end{cases}.$$

Le résoudre en posant $z(t) = x(t) - y(t)$.

Exercice 33 Résoudre le système différentiel :
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}.$$

Exercice 34

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : « $x''(t) - x(t) = -e^t \sin t + 2t$ ».
2. Résoudre alors le système différentiel suivant : (S)
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + t^2 \\ y'(t) = x(t) - e^t \sin t \end{cases}.$$

Exercice 35 Résoudre sur \mathbb{R} l'équation « $(1 + e^x)y'' + y' - e^x y = 0$ » en introduisant la fonction $z = y + y'$.

Exercice 36 On se propose de trouver les solutions à valeurs réelles de l'équation

$$(E) \text{ « } y^{(3)} + y'' + y' + y = 0 \text{ ».}$$

1. Vérifier que les fonctions $[x \mapsto k.e^{-x}]$ sont solutions de (E) (pour tout $k \in \mathbb{R}$).
2. On cherche la solution y sous la forme $y(x) = z(x)e^{-x}$: déterminer l'équation que vérifie z , et la résoudre.
3. Déterminer alors toutes les solutions de (E) .

Exercice 37

Résoudre « $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ » en posant $z = e^{-2x}y$.

Exercice 38 Soit l'équation (E) « $y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = 0$ ».

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $X^4 - 2X^2 + 1 = 0$.
2. Soit f , une fonction quatre fois dérivables sur \mathbb{R} , et $g = f'' - f$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si g est solution d'une équation différentielle (E') d'ordre deux que l'on précisera.
3. Résoudre (E') puis déterminer les solutions à valeurs réelles de (E) .

Exercice 39

Résoudre « $(1 + x^2)^2 y'' + 2(x - 1)(1 + x^2)y' + y = 0$ » par le changement de variable $t = \arctan x$.

Méthode : ceci revient à raisonner par analyse-synthèse : si y est une solution, définir la fonction φ par $\varphi(t) = y(x)$ i.e $y(x) = \varphi(\arctan(x))$. Chercher une EDL vérifiée par φ . Conclure proprement.

Exercice 40

Résoudre « $(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = \arccos x$ » par le changement de variable $t = \arccos x$.

Exercice 41 On considère l'équation « $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ ».

1. Intégrer cette équation pour $-1 < x < +1$ en posant $x = \sin t$ (i.e) $t = \arcsin x$.
2. Intégrer cette équation pour $x > 1$ puis $x < -1$ (en posant $x = ???$).

Exercice 42

Résoudre « $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ » en prenant comme variable t définie par $x = \text{sh}(t)$.

Exercice 43 Si y désigne une fonction deux fois dérivable, calculer $\frac{d^2(x^2y)}{dx^2}$.

Résoudre alors sur $]0, +\infty[$ les équations différentielles :

« $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ » puis « $x^2y'' + 4xy' + 2y = 4x + 2$ ».

Peut-on leur trouver des solutions définies sur \mathbb{R} ?

Exercice 44 On considère l'équation (E) « $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ ».

Choisir judicieusement la valeur de la constante α afin que le changement de fonction $z = x^\alpha y$ amène une équation plus simple à résoudre.

Résoudre alors (E) sur $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$.

Montrer que (E) possède une seule solution sur \mathbb{R} . Cela perturbe-t-il notre ami Cauchy ?

Exercice 45 On considère l'équation (E) : $y'' + 2y' + 4y = xe^x$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E). Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).
3. Déterminer la(-les?) solution(s) h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et qui vérifie, sur $]0, +\infty[$:
(*) « $t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln(t)$ ».

On pose $g(x) := f(e^x)$: vérifier que g est solution de (E). En déduire une expression de f .

Exercice 46 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation « $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ » par les deux méthodes :

1. En posant $t = \ln x$ (rappel : poser $y(x) = \varphi(t) = \varphi(\ln x)$ et déterminer φ).
2. En cherchant une solution du type x^α , puis en posant $y(x) = x^\alpha z(x)$ et en cherchant une équation différentielle vérifiée par z .

Exercice 47 Montrer que l'équation d'Euler « $ax^2y'' + bxy' + cy = f(x)$ » se ramène, par le changement de variables $t = \ln|x|$ ($\varphi(t) = y(x)$) à une équation différentielle à coefficients constants (sur $\varphi(t)$). Montrer également que, sauf cas particulier, la recherche de solutions de la forme x^α permet de résoudre ce type d'équation. Exemples : résoudre, par la méthode de votre choix

1. « $x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2$ »
2. « $x^2y'' + y = 0$ »
3. « $x^2y'' - 2y = x$ »
4. « $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x)$ »
5. « $x^2y'' + xy' - y = x^2$ »
6. « $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ »
7. « $x^2y'' + xy' + y = x \ln(x)$ »
8. « $x^2y'' + xy' + y = x \ln|x|$ »

Exercice 48 On considère l'équation différentielle (E) : $(1 + x + x^2)y'' + (4x + 2)y' + 2y = 0$.

1. De quel type d'équation s'agit-il ?
2. Vérifier que la fonction f , définie par $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$ est une solution de l'équation (E).
Pour simplifier le calcul, dériver deux fois par rapport à x la quantité $(x^2+x+1)f(x)$.
3. Chercher les autres solutions de (E) sous la forme $g(x) = C(x)f(x)$, avec $C(\cdot)$ une fonction à déterminer (vérifier que cela revient à résoudre deux EDL du 1^{er} ordre successivement).
4. Trouver toutes les solutions de l'équation (*) : $(1+x+x^2)y'' + (4x+2)y' + 2y = 6x+2$.

Exercice 49 Résoudre « $(y')^2 + y^2 = 1$ » (dériver cette relation).

Exercice 50 Soit l'équation différentielle (E) « $y'' + y = P(t)$ » où P désigne un polynôme à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n (autrement dit $P \in \mathbb{R}_n[X]$).

1. Soit a et b des constantes réelles, et la fonction $f = a \cos + b \sin$.
Prouver l'équivalence : (f est une fonction polynomiale) $\iff (a = b = 0)$.
2. Montrer que l'équation (E) admet une et une seule solution polynomiale donnée par
$$y_0(t) = \sum_{2k \leq n} (-1)^k P^{(2k)}(t) = P(t) - P''(t) + P^{(4)}(t) - P^{(6)}(t) + \dots$$
 (somme finie!).
3. Application : donner toutes les solutions de « $y'' + y = t^4 - t^3 + 3t^2 + 4t - 5$ ».

Exercice 51 Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Indication : commencer par justifier qu'une solution est nécessairement deux fois dérivable et solution d'une ÉDL du 2nd ordre. On rappelle que dans un raisonnement par *analyse-synthèse*, il y a l'analyse, mais aussi la synthèse...

Exercice 52 Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos(x).$$

Exercice 53 Déterminer toutes les fonctions f continues sur \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

Indication : commencer par justifier qu'une solution est nécessairement deux fois dérivable et solution d'une ÉDL du 2nd ordre non homogène, avec des conditions initiales précises.

Exercice 54 Soit $(k, \lambda) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (fixé).

Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = kf(\lambda - x)$.

Indication : (analyse) si f est une solution, justifier que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , trouver une EDL vérifiée par f qui permette de déterminer une forme générale pour f . Ne pas oublier la synthèse.

Exercice 55 (*Pour plus tard...*) Soit α , un réel fixé. On note E_α l'ensemble des applications dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\alpha - x)$.

1. Montrer que E_α est un espace vectoriel.
2. Montrer que, si f appartient à E_α , alors f est de classe C^∞ . Montrer que f est solution d'une ÉDL du 2nd ordre.
3. Déterminer une base de E_α .

Exercice 56

Soit p , une fonction continue et positive sur \mathbb{R} , non-constamment nulle. On veut prouver que toute solution de l'équation différentielle « $y'' + p(x)y = 0$ » s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

1. Vérifier que le résultat est évident pour le cas particulier où la fonction p est constante.
2. Pour le cas général, on raisonne par l'absurde : soit f une solution de l'équation qui ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Justifier que f est de signe constant sur \mathbb{R} . Quitte à considérer $-f$, justifier qu'on peut se restreindre au cas : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
3. Étudier le signe de f'' .
4. Soit $a \in \mathbb{R}$, un réel quelconque.
 - (a) Quelle est l'équation « $Y = T_a(X)$ » de la tangente au graphe de f en a ?
 - (b) Montrer que le graphe de f est en dessous de sa tangente en a (étudier $f(x) - T_a(x)$).
 - (c) En déduire que $f'(a) = 0$ (indication : que peut-on dire du signe de $T_a(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ si $f'(a) \neq 0$?).
5. Conclure.
6. Le résultat est-il encore vrai si p est la fonction nulle sur \mathbb{R} ?