

---



---

## ESPACES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

---



---

**Exercice 1** Soit  $E$ , un espace vectoriel,  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  deux éléments de  $E$ .

En remarquant qu'on peut écrire :

$$2(\vec{x} + \vec{y}) = (1 + 1)(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{x}) + \vec{y}, \text{ et}$$

$2(\vec{x} + \vec{y}) = 2\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{x} + (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{y}$ , justifier que l'hypothèse de commutativité de l'addition, dans la définition d'un espace vectoriel, est superflue.

**Exercice 2** On munit  $\mathbb{K}^2$  de la LCI  $+$  et de la LCE  $\cdot$  définies par :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, 0).$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  est-il un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

**Exercice 3** On rappelle que  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  et plus généralement  $\mathbb{R}^n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour ces mêmes lois ? Le cas échéant, en déterminer une famille génératrice simple.

1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ .
2.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ .
3.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \text{ ou } x + y = 0\}$
4.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$ .
5.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ .
6.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)(x - y) = 0\}$ .
7.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)^2 + (x - y)^2 = 0\}$ .
8.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$
9.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + 1)^2 + z - 4y = (x - 1)^2\}$
10.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}$
11.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ .
12.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$  où  $a$  est un réel fixé.
13.  $A =$  l'ensemble des triplets de  $\mathbb{R}^3$  pouvant s'écrire  $(\alpha - \beta, \beta, \alpha + \beta)$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  réels.
14.  $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ .

**Exercice 4** On rappelle que  $\mathbb{K}^n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ) est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}^n$  ?

1.  $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = 0\}$ .
2.  $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = 0\}$ .
3.  $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2\}$ .
4.  $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 \neq 0\}$ .
5.  $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 = 0\}$ .
6.  $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 \times x_2 = 0\}$ .

**Exercice 5** On rappelle que l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  des suites à valeurs réelles est un espace vectoriel pour les lois usuelles. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour ces mêmes lois ?

1.  $A =$  ensemble des suites réelles convergentes vers 1.
2.  $A =$  ensemble des suites réelles convergentes vers 0.
3.  $A =$  ensemble des suites réelles convergentes.
4.  $A =$  ensemble des suites réelles divergentes sans limite.
5.  $A =$  ensemble des suites réelles divergentes de limite  $+\infty$ .
6.  $A =$  ensemble des suites réelles négligeables devant  $n^2$ .
7.  $A =$  ensemble des suites réelles négligeables devant  $\frac{1}{n}$ .
8.  $A =$  ensemble des suites réelles équivalentes à  $n^2$ .
9.  $A =$  ensemble des suites réelles  $u$  vérifiant : pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 5u_n - 3$ .
10.  $A =$  ensemble des suites réelles  $u$  vérifiant : pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 5u_n$ .
11.  $A =$  ensemble des suites réelles  $u$  vérifiant : pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+3} = 8u_n$ .
12.  $A =$  ensemble des suites réelles  $u$  vérifiant : pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} - 3u_n$ .
13.  $A =$  ensemble des suites réelles  $u$  vérifiant : pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ .
14.  $A =$  ensemble des suites réelles arithmétiques.
15.  $A =$  ensemble des suites réelles géométriques.
16.  $A =$  ensemble des suites réelles arithmético-géométriques.
17.  $A =$  ensemble des suites réelles bornées.
18.  $A =$  ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
19.  $A =$  ensemble des suites réelles stationnaires.
20.  $A =$  ensemble des suites réelles périodiques.

**Exercice 6** On rappelle que l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  des fonctions numériques de la variable réelle est un espace vectoriel pour les lois usuelles. Soit  $I \subset \mathbb{R}$ , une partie de  $\mathbb{R}$  (par exemple un intervalle). On rappelle également que  $\mathbb{R}^I$ ,  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$  respectivement ensemble des fonctions définies, continues, dérivables, de classe  $C^n$ , indéfiniment dérivables sur  $I$  à valeurs réelles, sont des espaces vectoriels. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour ces mêmes lois ?

1.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et paires.
2.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et nulle en 2.
3.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et nulle en 2 et en 5.
4.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et nulle en 2 ou en 5.
5.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et qui s'annulent une infinité de fois sur  $\mathbb{R}$ .
6.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et de limite nulle en  $+\infty$ .
7.  $A =$  ensemble des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  solutions de l'équation différentielle « $y' + 2xy = 0$ ».
8.  $A =$  ensemble des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  solutions de l'équation différentielle « $y' + 2xy = \sin(x)$ ».
9.  $A =$  ensemble des fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et solutions de l'équation différentielle « $y'' + 2y' + y = 0$ ».
10.  $A =$  ensemble des fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et solutions de l'équation différentielle « $y'' + 3y' - 5y = e^x \sin(x)$ ».
11.  $A =$  ensemble des fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et solutions de l'équation différentielle « $y'' + 2y' + y = 0$ » avec la condition  $y(0) = 0$ .
12.  $A =$  ensemble des fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et solutions de l'équation différentielle « $y'' + y = 0$ ».
13.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $[0, 1]$  vérifiant  $f(\frac{1}{2}) = 0$ .
14.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $[0, 1]$  vérifiant  $\int_0^1 f(t)dt = a$  avec  $a$  fixé.
15.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $[0, 1]$  vérifiant  $f(0) = f(1)$ .
16.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(1) = f(0) + 1$ .
17.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(a - x)$ , où  $a$  est un réel fixé.
18.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  telles qu'il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + c$ .
19.  $A =$  ensemble des fonctions croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

20.  $A =$  ensemble des fonctions monotones de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
21.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 10$ .
22.  $A =$  ensemble des fonctions bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
23.  $A =$  ensemble des fonctions  $T$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $T > 0$  fixé.
24.  $A =$  ensemble des fonctions périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , à période rationnelle.
25.  $A =$  ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui peuvent s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.
26.  $A =$  ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  pour lesquelles il existe un réel  $M \geq 0$  tel que :  $(|x| \geq M) \Rightarrow f(x) = 0$  (ensemble des fonctions «à support compact»).

**Exercice 7** On rappelle que l'ensemble  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes à coefficients réels est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour ces mêmes lois ?

1.  $A =$  ensemble des polynômes  $P$  vérifiant  $P(0) = 1$ .
2.  $A =$  ensemble des polynômes  $P$  vérifiant  $P(0) = 0$ .
3.  $A =$  ensemble des polynômes admettant  $a$  pour racine,  $a$  étant un réel fixé.
4.  $A =$  ensemble des polynômes admettant  $a$  et  $b$  pour racines,  $a$  et  $b$  étant deux réels fixés.
5.  $A =$  ensemble des polynômes admettant (au moins) une racine réelle.
6.  $A =$  ensemble des polynômes n'admettant pas de racine réelle.
7.  $A =$  ensemble des polynômes  $P$  vérifiant  $P'' + P = 0$ .
8.  $A =$  ensemble des polynômes de degré 3.
9.  $A =$  ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, noté  $\mathbb{R}_3[X]$ .
10.  $A =$  ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , noté  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exercice 8** On rappelle que  $\mathbb{C}$  est un espace vectoriel qui peut être vu comme un  $\mathbb{R}$ -ev ou comme un  $\mathbb{C}$ -ev.

1. Montrer que, en tant que  $\mathbb{R}$ -ev,  $\mathbb{C}$  est un plan vectoriel.
2. Montrer que, en tant que  $\mathbb{C}$ -ev,  $\mathbb{C}$  est une droite vectorielle.

**Exercice 9** Soit  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n = 0\}$ .

Montrer que  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 10** On considère  $F$ , l'ensemble des suites réelles  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour lesquelles il existe

au moins un entier  $p$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n \times p} = 0$ .

Autrement dit :  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n \times p} = 0\}$ .

Montrer que l'ensemble  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Donner un exemple non trivial d'élément de  $F$  et qui ne soit pas une suite périodique.

**Exercice 11** On considère  $F$ , l'ensemble des suites réelles  $u = (u_n)_{n \geq 1}$  pour lesquelles la suite  $(|u_n|^{\frac{1}{n}})_{n \geq 1}$  est bornée. Autrement dit,  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \mid \exists C \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n|^{\frac{1}{n}} \leq C\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sev de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ .
2. Donner des exemples non triviaux d'éléments de  $F$ .
3. On note  $G$ , le sev de  $E$  constitué des suites bornées : comparer  $F$  et  $G$ .

**Exercice 12**

Soit  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$  et  $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux plans vectoriels.
2. Montrer que  $F \cap G$  est une droite vectorielle.

**Exercice 13** Soit  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n\}$ .

Prouver que  $F$  est un plan vectoriel.

**Exercice 14**

Soit  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n\}$  et  $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n\}$ .

On sait que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des plans vectoriels.
2. Montrer que si  $u \in F \cap G$ , alors  $u$  est une suite constante.
3. En déduire  $F \cap G$ . Etonnant, non ?

**Exercice 15**

Soit  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$  et  $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n\}$ .

On sait que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (et même des plans vectoriels).

1. Montrer que si  $u \in F \cap G$ , alors  $u$  est une suite géométrique de raison 4.
2. En déduire  $F \cap G$ .

**Exercice 16**

Soit  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n\}$  et  $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$ .

On sait que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (et même des plans vectoriels).

1. Montrer que si  $u \in F \cap G$ , alors  $u$  est une suite géométrique de raison 2.
2. En déduire  $F \cap G$ .

**Exercice 17** On pose  $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\}$ ,  
 $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}$  et  $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2u_n = 0\}$ .

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel, puis que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
2. Que peut-on dire de l'ensemble  $F \cap G$ ? Le déterminer complètement.
3. Vérifier que  $F$  et  $G$  sont des droites vectorielles et  $E$  un plan vectoriel.

**Exercice 18** On définit les trois ensembles  $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}$ ,  
 $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 0\}$  et  $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_1 = 0\}$ .

1. Montrer que  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont des espaces vectoriels.
2. Que peut-on dire de l'ensemble  $E \cap F \cap G$ ? Préciser...
3. Vérifier que  $E \cap F$  et  $E \cap G$  sont des droites vectorielles.

**Exercice 19**

1. Soit  $F$ , l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  et solutions de l'équation différentielle « $y'' - 2y' - 3y = 0$ ». Vérifier que  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -ev. Être plus précis est le bienvenu...
2. Soit  $G$ , l'ensemble des fonctions bornées sur  $\mathbb{R}$  : vérifier que  $G$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.
3. Que peut-on dire de  $F \cap G$ ? Préciser.
4. Soit  $H$ , l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et nulles en 0 : vérifier que  $G$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.
5. Que peut-on dire de  $F \cap H$ ? Justifier que c'est une droite vectorielle.
6. Soit  $K$ , l'ensemble des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et de dérivée nulle en 0 : vérifier que  $K$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.
7. Que peut-on dire de  $F \cap K$ ? Justifier que c'est une droite vectorielle.
8. Que peut-on dire de  $F \cap H \cap K$ ? A-t-on  $H \cap K = G$ ?

**Exercice 20**

1. Soit  $F$ , l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  et solutions de l'équation différentielle « $y'' + 2y' + 5y = 0$ ». Vérifier que  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -ev : mieux, montrer que c'est un plan vectoriel dont on précise un système générateur.
2. Soit  $G$ , l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et bornées sur  $\mathbb{R}^+$  : vérifier que  $G$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.

3. Montrer que  $F$  est un sous-espace de  $G$ .
4. Soit  $H$ , l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et bornées sur  $\mathbb{R}^-$  : vérifier que  $H$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.
5. Que peut-on dire de  $F \cap H$  ?

**Exercice 21** Soit  $F = \{\vec{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - 3t = 0\}$ .

Montrer que  $F$  est un plan vectoriel. En préciser une famille génératrice.

**Exercice 22** Soit  $F = \{\vec{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$ .

Montrer que  $F$  est un plan vectoriel. En préciser une famille génératrice.

**Exercice 23**

Soit  $F = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  et  $G = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$ .

1. Justifier que  $F$  et  $G$  sont des  $\mathbb{K}$ -ev. Puis montrer que  $F$  et  $G$  sont des plans vectoriels.
2. Soit  $H = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$ . Montrer que  $H$  est un  $\mathbb{K}$ -ev. Puis prouver que  $H$  est une droite vectorielle.

**Exercice 24** Soit  $F = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0\}$ .

Justifier que  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -ev. Puis montrer que  $F$  est un plan vectoriel.

**Exercice 25** On définit la fonction  $d$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, d(x) = \cos(2x)$ . Puis on définit le sev  $F$  de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  par  $F = \text{vect}(\tilde{1}, d)$ .

1. Justifier que  $F$  est un plan vectoriel.
2. Démontrer que  $F = \text{vect}(\sin^2, \cos^2)$ .

**Exercice 26** On considère  $F$ , l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, et d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ . Autrement dit,  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(t)dt = 0\}$ .

1. Vérifier que  $F$  est un sev de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Prouver que  $F$  est un plan vectoriel.

**Exercice 27** Soit  $F = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = a + \frac{b}{x}\}$ .

Montrer que  $F$  est un plan vectoriel.

**Exercice 28** Soit  $F$ , l'ensemble des fonctions numériques  $f$  définies et continues sur  $[0, 1]$  telles que  $\int_0^1 f(t)dt = f(\frac{1}{2})$ , autrement dit  $F = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f = f(\frac{1}{2})\}$ .

1. Prouver que  $F$  est un espace vectoriel.
2. Donner des exemples non-triviaux d'éléments de  $F$  (avec des fonctions trigonométriques, des polynômes, etc...).

**Exercice 29** On considère  $F$ , l'ensemble des fonctions réelles  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  pour lesquelles il existe au moins une constante  $C_f$  positive vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C_f|x|$ .

Autrement dit :  $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists C_f \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C_f|x|\}$ .

1. Montrer que l'ensemble  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Les fonctions suivantes sont-elles des éléments de  $F$  :  $\exp$ ?  $\cos$ ?  $\sin$ ?  $X^2$ ?

**Exercice 30** Soit  $(G, *)$ , un groupe. Une application  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  est un «*quasi-morphisme*» sur  $G$  s'il existe une constante  $C_f$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :  $\forall (x, y) \in G^2, |f(x * y) - f(x) - f(y)| \leq C_f$ .

1. Montrer que  $\mathcal{Q}$ , l'ensemble des quasi-morphismes sur  $G$ , est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. De même, montrer que  $\mathcal{M}$ , l'ensemble des morphismes de groupes de  $(G, *)$  vers  $(\mathbb{R}, +)$  est aussi un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Comparer  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{M}$ .

**Exercice 31** On sait que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel. Montrer que c'est encore vrai pour une intersection quelconque de sev (pas nécessairement finie ni même dénombrable!). Autrement dit, en prenant  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de sev d'un ev  $E$ , montrer que  $B = \bigcap_{i \in I} A_i$  est un sev de  $E$ .

Indication : on rappelle la caractérisation d'appartenance  $(x \in B = \bigcap_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I, x \in A_i)$ .

**Exercice 32** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-ensembles d'un ev  $E$  : a-t-on

$$(F \cap G \text{ est un sev de } E) \Rightarrow (F \text{ et } G \text{ sont des sev de } E) ?$$

Examiner l'exemple  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$  et  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ .

**Exercice 33** Soit  $E$ , un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels (sev) de  $E$ .

Montrer que :  $(F \cup G = E) \Leftrightarrow (F = E \text{ ou } G = E)$ .

**Exercice 34** Soit  $E$  un ev. Soit  $F$  et  $G$ , deux sev de  $E$ .

1. Prouver, à l'aide d'un contre-exemple simple, qu'en général la réunion  $F \cup G$  n'est pas un sev de  $E$ .
2. Démontrer l'équivalence suivante :

$$(F \cup G \text{ est un sev de } E) \Leftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$$

**Exercice 35** Soit  $A$  et  $B$ , deux sev d'un ev  $E$ . Prouver les équivalences :

$$(A \cup B \text{ est un sev de } E) \Leftrightarrow (A \cup B = A + B) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ ou } B \subset A).$$

**Exercice 36** Dans  $E = \mathbb{R}^3$ , on pose  $F = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b})$  et  $G = \text{vect}(\vec{c}, \vec{d})$ , avec  $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, -2)$ ,  $\vec{c} = (3, 7, 0)$ ,  $\vec{d} = (5, 0, -7)$ . Montrer que  $F = G$ .

**Exercice 37** On pose  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{a} = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{c} = (1, 4, 5)$ ,  $\vec{d} = (1, 2, 0)$ ,  $\vec{e} = (1, 1, 1)$ . On définit alors les espaces engendrés  $F = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  et  $G = \text{vect}(\vec{d}, \vec{e})$ .

1. Justifier que  $F$  et  $G$  sont des plans vectoriels.
2. A quelle condition le vecteur  $\vec{u} = (x, y, z)$  appartient-il à  $F$  ? à  $G$  ?
3. Montrer que  $F \cap G$  est une droite vectorielle.

**Exercice 38** Le complémentaire d'un sev est-il un sev ?

**Exercice 39**

1. Soit  $E_1$  et  $E_2$ , deux  $\mathbb{K}$ -ev : on rappelle que  $E_1 \times E_2$  est également un  $\mathbb{K}$ -ev, appelé *espace vectoriel produit* (muni des lois usuelles : voir cours).  
Soit  $F_1$  un sev de  $E_1$ , et  $F_2$  un sev de  $E_2$  :  $F_1 \times F_2$  est-il un sev de  $E_1 \times E_2$  ?
2. Soit  $G$  l'ensemble des couples  $(P, r)$  où  $P$  est un polynôme à coefficients réels et  $r$  un réel. Montrer que  $G$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.
3. Soit  $H$ , l'ensemble des couples  $(P, P(1))$  où  $P$  est un polynôme à coefficients réels :  $H$  est-il un sev de  $G$  ?
4. Soit  $K$ , l'ensemble des couples  $(P, P(1)^2)$  :  $K$  est-il un sev de  $G$  ?
5. Soit  $L$ , l'ensemble des couples  $(X^3 - 2rX + r, r)$  où  $r$  est réel :  $L$  est-il un sev de  $G$  ?

**Exercice 40** Soit  $E$ , un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

L'ensemble  $B = C_E^A$  désigne le complémentaire de  $A$  dans  $E$  :  $B = \{\vec{x} \in E \mid \vec{x} \notin A\}$ .

1. Pourquoi  $B$  ne peut-il pas être un sous-espace vectoriel de  $E$  ?
2. On pose  $D := B \cup \{\vec{0}\}$ 
  - (a) Qui est  $D$  si  $A = E$  ? si  $A = \{\vec{0}\}$ .
  - (b) On suppose désormais que  $A \neq E$  et  $A \neq \{\vec{0}\}$  : on dit que  $A$  est un sous-espace strict de  $E$ . Justifier l'existence de vecteurs  $\vec{x} \neq \vec{0}$  dans  $A$  et  $\vec{y} \neq \vec{0}$  dans  $D$ .  
En considérant le vecteur  $\vec{s} = \vec{x} + \vec{y}$  et en raisonnant par l'absurde, prouver que  $D$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice 41**

- Soit  $(F_i)_{i \in I}$ , une famille de sev d'un ev  $E$ . Montrer que  $N = \bigcap_{i \in I} F_i$  est un sev de  $E$ .
- Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  : pour tout réel  $a$ , on note  $F_a = \{f \in E \mid f(a) = 0\}$ .
  - Montrer que  $F_a$  est un sev de  $E$ .
  - Soit  $G = \{f \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 0\}$  et  $H = \{f \in E \mid \forall x \in [0, \pi], f(x) = 0\}$ .  
Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $E$ .

**Exercice 42** Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on définit l'ensemble

$$F_n = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq n \Rightarrow f(x) = 0\}.$$

- Vérifier que  $F_n$  est un sev de  $E$  (pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ).
- On pose  $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  :  $I$  est-il un sev de  $E$ ? Le prouver. Puis, détailler les éléments de  $I$ .
- On pose  $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  :  $R$  est-il un sev de  $E$ ? Le prouver.

**Exercice 43** Soit  $E$ , un espace vectoriel qui n'est pas un singleton. On veut prouver que  $E$  ne peut pas s'écrire comme une réunion d'un nombre fini de sev stricts. On rappelle que  $F$  est un sev strict de  $E$  si  $F \neq E$  et  $F \neq \{\vec{0}\}$ .

Posons l'hypothèse  $P_n$  : «si  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont  $n$  sev stricts de  $E$  alors  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n \neq E$ ».

On va raisonner par récurrence sur  $n \geq 2$ .

- Prouver que  $P_2$  est vraie. Autrement dit prouver que  $F_1 \cup F_2 \neq E$  si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sev stricts de  $E$ .
- Soit un entier  $n \geq 3$  tel que  $P_{n-1}$  est vrai : donc, la réunion de  $n - 1$  sev stricts ne peut pas être égale à  $E$ . Soit  $F_1, F_2, \dots, F_n$ ,  $n$  sev stricts de  $E$ . Supposons (raisonnement par l'absurde) que  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n = E$ .
  - Pourquoi a-t-on  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n-1} \neq E$ ? En déduire qu'il existe, dans  $E$ , un vecteur  $\vec{x} \in F_n - (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n-1})$  et un vecteur  $\vec{y} \notin F_n$ .
  - Pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$ , montrer  $\lambda\vec{x} + \vec{y} \notin F_n$ .
  - Pour tout entier  $i = 1 \dots n - 1$ , montrer qu'il existe au plus un  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  tel que  $\lambda_i\vec{x} + \vec{y} \in F_i$ .  
Indication : raisonner par l'absurde.
  - Conclure à une absurdité (en remarquant que  $\mathbb{K}$  contient au moins  $n$  éléments....).
- En notant  $G_k := \mathbb{R}_k[X]$ , l'ev des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $k$ , qui est  $\bigcup_{k \geq 0} G_k$ ? Conclusion?