APPLICATIONS LINÉAIRES

Exemples d'applications linéaires

Exercice 1 Les applications suivantes, entre $\mathbb{R}$-ev, sont-elles linéaires ? :

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + y - 1$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = xy$.
3. $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = x - y + 2z$.
4. $k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $k(x, y, z) = x - 2y$.

Exercice 2 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y - 1, 2x - y) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array} \right.$.
Montrer : $f \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $g \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 4 Déterminer tous les endomorphismes du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$. Préciser les automorphismes.

Exercice 5

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $\varphi(x, y) = (y, 0)$. Montrer que φ est linéaire.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$. Que peut-on dire de $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$?
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = 2x - 3y$. Montrer que φ est une forme linéaire.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\varphi(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$.
   Montrer que φ est linéaire. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\varphi(x, y) = (x + y, x - 2y, -x + 3y)$.
   Montrer que φ est linéaire. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, définie par $\varphi(x, y, z) = (x + y + z, x - y + 2z)$.
   Montrer que φ est linéaire. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
6. Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\varphi(x, y, z, t) = (x - y + t, 2x + y - z, y + z)$.
   Montrer que φ est linéaire. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
7. Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\varphi(x, y, z, t) = (x + t, 0, y + z)$. Montrer que φ est linéaire.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
8. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\varphi(x, y, z) = (x, x, x)$. Montrer que φ est linéaire.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$. Calculer φ^2. Conclusion ?

9. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que : $\varphi(1,0,0)=(0,1)$, $\varphi(0,1,0)=(1,0)$ et $\varphi(0,0,1)=(1,1)$. Déterminer ses noyau et image.
10. Donner un exemple d'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^2$ tel que Ker(φ)=Im(φ).

Exercice 6 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+2y, y) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y,Z) & \longmapsto & (X+Z, 5X-2Y+Z) \end{array} \right.$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que $g \circ f \in GL(\mathbb{R}^2)$. Préciser $(g \circ f)^{-1}$.
4. $f \circ g$ est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7 Soit a, b deux réels fixés. On définit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \varphi(P) := (P(a), P(b)) \end{array} \right.$.

1. Montrer que φ est une application linéaire , autrement dit prouver $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^2)$.
2. On suppose, dans cette question : $a=-1$ et $b=3$. Déterminer le noyau et l'image de φ.
3. On revient au cas général : déterminer le noyau et l'image de φ lorsque $a \neq b$, puis lorsque $a=b$.

Exercice 8 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-ev des applications numériques in(dé)finiment dérivables sur $\mathbb{R}$. On définit alors l'application φ de E dans lui même par : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \varphi(f) = g \end{array} \right.$.
Dire, dans les cas suivants, si φ est linéaire ou pas : $\forall x \in \mathbb{R}$,

1. $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
2. $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$
3. $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$
4. $g(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$
5. $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$
6. $g(x) = \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right) x^2$
7. $g(x) = \left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) f'(x)$
8. $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$
9. $g(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$
10. $g(x) = f''(x^2)$
11. $g(x) = \left(f''(x)\right)^2$
12. $g(x) = f''(1)x^2$

Exercice 9 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \varphi(f) := f' - 2f \end{array} \right.$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer Kerφ. Conclusion ?
3. Justifier que φ est surjective.

Exercice 10 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \varphi(f) := f'' - 3f' + 2f \end{array} \right.$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer Kerφ. Conclusion ?

Exercice 11 On pose $E = \mathbb{R}[X]$, le $\mathbb{R}$-ev des polynômes à coefficients réels et, pour tout $P \in E$, $f(P) = P - P'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer son noyau : f est-elle injective ?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme P_n par $P_n(x) = -n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)$.

   Vérifier que P_n est une solution de l'équation différentielle $y' - y = x^n$.
4. En déduire la surjectivité de l'application f.

Exercice 12 On pose $E = \mathbb{R}[X]$, le $\mathbb{R}$-ev des polynômes à coefficients réels et, pour tout $P \in E$, $f(P) = P - XP'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer son noyau et son image : f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 13

On définit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) := P' - (X-2)P \end{array} \right.$ et $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \psi(P) := P - (X-2)P' \end{array} \right.$

1. Montrer que φ et ψ sont des applications linéaires , autrement dit prouver $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X])$ et $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$
2. Déterminer les noyaux et images de φ et ψ.
3. Etudier l'application $\psi \circ \varphi$. Que dire de $\varphi \circ \psi$?

Exercice 14 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables.
Pour tout f de E, on pose $\varphi(f) = f''$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, puis déterminer Ker$\varphi$ et Imφ.

Exercice 15 Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$, respectivement les sev des suites convergentes et des suites bornées de l'ev $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit les applications

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \varphi(u) = \lim(u) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \psi(u) = \sup(u) = \sup\{u_0, u_1, u_2, \ldots\} \end{array} \right. .$$

1. Vérifier que φ est linéaire et préciser son noyau et son image. Conclusion ?
2. Justifier que l'application ψ est bien définie : est-elle linéaire ?

Exercice 16 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le $\mathbb{R}$-ev des suites à valeurs réelles.

On définit l'application $S : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & S(u) = v \end{array} \right.$ où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n := u_{n+1}$.

1. Vérifier que S est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.
2. Pour tout réel λ, on définit l'ensemble $E_\lambda = \{u \in E \mid S(u) = \lambda u\}$.
   Montrer que E_λ est un sev de E. Caractériser les éléments de E_λ.

Exercice 17 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le $\mathbb{R}$-ev des suites à valeurs réelles.

On définit l'application $G : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & G(u) = v \end{array} \right.$ où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n := u_{n+1} - 2u_n$.

Vérifier que G est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 18

Soit $E = \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\right\}$: montrer que E est un espace vectoriel.
Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$, définie par $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \varphi(u) := (u_0, u_1)$.
Montrer que φ est linéaire et déterminer son noyau et son image. Conclusion ?

Exercice 19 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

On définit sur E les applications φ et ψ par : $\forall f \in E$, $\varphi(f) := \cos \circ f$, $\psi(f) := f \circ \cos$.
φ et ψ sont-elles des endomorphismes de E ?

Exercice 20 Soit E, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et 2π-périodiques.

Pour tout $f \in E$, on pose $\Delta(f) = f'$. Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
Déterminer son noyau et son image, puis prouver qu'ils sont supplémentaires dans E.

Exercice 21 On considère ici $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et l'application u définie sur $\mathbb{C}$ par : $u(z) = iz - i\bar{z}$. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}$. En déterminer le noyau et l'image.
Calculer u^2 : en déduire que l'endomorphisme $(\mathrm{Id}_E + 2u)$ est inversible et déterminer son inverse $(\mathrm{Id}_E + 2u)^{-1}$.

Exercice 22 On considère ici $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et l'application u définie sur $\mathbb{C}$ par : $u(z) = (1+i)z + (1-i)\bar{z}$. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
En déterminer le noyau et l'image.

Exercice 23 On considère ici $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et l'application φ définie sur $\mathbb{C}$ par : $\varphi(z) = z + a\bar{z}$, où a est un élément fixé non nul de $\mathbb{C}$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$. En déterminer le noyau et l'image.

Exercice 24 Soit φ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E. On définit $F := \{\vec{x} \in E \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{x}\}$, appelé ensemble des vecteurs fixes de φ (invariants par φ).

1. Montrer que F est un sev de E.
2. Montrer que $F \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{\vec{0}\}$.

Exercice 25 On définit l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = (3x + y, -2x)$.

1. Déterminer le noyau et l'image de φ.
2. Si λ est un réel fixé, on pose $H_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, y) = \lambda(x, y)\}$.
   Montrer que H_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer qu'il existe deux valeurs λ_1 et λ_2 tels que H_{λ_1} et H_{λ_2} ne soient pas réduits à $\{\vec{0}\}$.
   Montrer que $H_{\lambda_1} \oplus H_{\lambda_2} = \mathbb{R}^2$.

Exercice 26 Soit u un endomorphisme de E tel que : $u^2 - 5u + 6\mathrm{Id}_E = 0\ (= 0_{\mathcal{L}(E)})$.

1. Justifier que u est bijective et exhiber u^{-1}.
2. Montrer que : $\mathrm{Im}(\ u - 3\mathrm{Id}_E\ ) \subset \mathrm{Ker}(\ u - 2\mathrm{Id}_E\ )$ et $\mathrm{Im}(\ u - 2\mathrm{Id}_E\ ) \subset \mathrm{Ker}(\ u - 3\mathrm{Id}_E\ )$.
3. Montrer que Id_E est combinaison linéaire de $u - 3\mathrm{Id}_E$ et de $u - 2\mathrm{Id}_E$.
   En déduire que $E = \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.
4. Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.
5. On pose $p = 3I - u$ et $q = u - 2I$ où $I = \mathrm{Id}_E$.
   (a) Vérifier que u est une combinaison linéaire de p et de q.
   (b) Vérifier que p et q sont des projecteurs qui commutent entre eux.
   (c) En déduire une expression simple de u^n valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
6. Une application numérique : soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (4x-2y, x+y)$.
   Que vaut $f^2 - f + 6I$? En déduire une expression de $f^n(x, y)$.
   Avec $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} &= u_n + v_n \end{cases}$, comment obtenir une expression de u_n et v_n en fonction de n ?

Exercice 27

1. Si f et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E vérifiant $f = 3I + g$ avec $g^2 = 0$, montrer que $f^n = 3^n I + n3^{n-1} g$ pour tout entier $n \geq 0$.
2. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ puis $\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 3v_n \end{cases}$ pour tout entier $n \geq 0$.
   A l'aide de $f(x, y) = (3x + y, 3y)$, donner une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 28 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que : $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que les ensembles $F_1 = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{x}\}$ et $F_2 = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = 2\vec{x}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer les sev F_1 et F_2 sont des sev supplémentaires de E.

Exercice 29 Soit f, un endomorphisme d'un ev E vérifiant $f^3 = f^2 + f$.
Montrer $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
Indication : remarquer $f \circ (\mathrm{Id} + f - f^2) = 0$ et $\vec{x} = \vec{x} + f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) - f(\vec{x})$.

Exercice 30 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ étant fixés, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\begin{cases} x + y & = a \\ x + 2y + z & = b \\ x \quad\quad + z & = c \end{cases}$.

Exercice 31 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
On définit sur E l'application Δ par :
si $f \in E$, $\Delta(f)$ est la fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau.
2. Montrer que : $\forall f \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\Delta^n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$.
   En remarquant que $f(x+1) = (\mathrm{Id}_E + \Delta)(f)(x)$, montrer que $f(x+n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(f)(x)$.

Exercice 32 Soit un entier $n \geq 1$, et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On définit l'opérateur dérivation D par : $\forall P \in E$, $D(P) = P'$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.
2. Calculer $(\mathrm{Id}_E - D) \circ (\mathrm{Id}_E + D + D^2 + \cdots + D^n)$.
3. Justifier que D est un endomorphisme nilpotent de E.
4. Montrer que $\mathrm{Id}_E - D$ est un isomorphisme de E.
   Résoudre alors, dans E puis $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'équation différentielle suivante : « $y'(x) - y(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ ».

Exercice 33
Soit $E = \mathbb{R}[X]$, le $\mathbb{R}$-ev des polynômes à coefficients réels. Pour tout $P \in E$, on définit $\varphi(P) := P' - P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2. Montrer que l'équation $\varphi(P) = X^2$ possède au moins une solution. De même, on pourrait prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'équation $\varphi(P) = X^k$ possède au moins une solution que l'on note Q_k. En déduire la surjectivité de φ.

Exercice 34
Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $f \in E$, on pose $\varphi(f) := f' - f$. Montrer que φ est un endomorphisme de E surjectif mais non injectif.

Applications linéaires - Noyaux - Images

Exercice 35 Soit E, un $\mathbb{R}$-ev et $\varphi \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, une forme linéaire non-nulle sur E (i.e $\varphi \neq \tilde{0}$).

1. Prouver que φ une application surjective.
2. Montrer qu'il existe $\vec{a} \in E$ tel que $E = \mathrm{vect}(\vec{a}) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 36

1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, une application linéaire et $A = \mathrm{vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$, le sev de E engendré par les vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ de E. Montrer que $\varphi(A) = \mathrm{vect}(\varphi(\vec{a}_1), \varphi(\vec{a}_2), \ldots, \varphi(\vec{a}_n))$.
2. Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'application φ définie par $\varphi(f) = f'$ et l'ensemble $A = \{f \in E | f'' + f = 0\}$. Montrer que φ est un endomorphisme de E : déterminer son image et son noyau, puis l'image directe $\varphi(A)$ et l'image réciqroque $\varphi^{-1}(A)$.

Exercice 37 Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, un vecteur non nul fixé.
On définit l'application f par : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $f(\vec{x}) = \vec{x} \wedge \vec{u}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer son noyau et son image : f est-elle injective ? surjective ?
3. Montrer que f^3 et f sont proportionnelles.

Exercice 38 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ev des fonctions numériques infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $f \in E$, on définit $D(f) = f'$ (dérivée de f) et $P(f) = F$, LA primitive de f qui s'annule en 0 (F est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$).

1. Vérifier que D et P sont des endomorphismes de E.
2. Vérifier que $D \circ P = \mathrm{Id}_E$ mais que $P \circ D \neq \mathrm{Id}_E$. Conséquence ?
3. On rappelle $D \circ P = \mathrm{Id}_E$: montrer que $E = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(D)$.
4. Déterminer les noyaux et images de D et P : en particulier, montrer que D est surjective, non injective, et P injective et non surjective.

Exercice 39 Soit f et g, deux endomorphismes d'un ev E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
Montrer qu'on a $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} g = E$.

Exercice 40 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $f \circ f = 0 \Leftrightarrow (\ \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f\ )$.

Exercice 41 Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev, et des applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que : $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)} \Leftrightarrow (\ \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g\ )$. **RÉSULTAT À RETENIR ! ! !**

Exercice 42 Soit u et v, deux endomorphismes d'un ev E qui commutent (i.e $u \circ v = v \circ u$).

1. Montrer que le noyau et l'image de v sont stables par u *(résultat à retenir)*.
2. On suppose $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v)$. Montrer les inclusions $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$.

Exercice 43 Soit $f : E \to F$, une application linéaire et H, un supplémentaire de $\text{Ker}(\varphi)$ dans E.
On définit l'application $g : H \to \text{Im}(f)$ par $g(\vec{x}) := f(\vec{x})$.
Vérifier que g est bien définie, linéaire, puis que g est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 44 Soit E un ev et $f \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E.
Montrer que $f(\text{Ker}(f \circ f)) = \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Exercice 45 Soit E un ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$, deux endomorphismes de E.
Montrer que $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$.

Exercice 46 Soit u et v, deux endomorphismes de E .
Montrer : ($u \circ v \circ u = 0$)$\Leftrightarrow$ ($v(\text{Im } u) \subset \text{Ker } u$)

Exercice 47 Soit f, un endomorphisme d'un espace vectoriel E (i.e) $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
2. Montrer que l'on a les équivalences suivantes :
   $(\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)) \Leftrightarrow (\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\})$ et
   $(\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)) \Leftrightarrow (E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f))$.
3. Quel résultat retrouve-t-on lorsque f est un projecteur de E ?

Exercice 48 Soit f et g, deux applications linéaires de E dans F, espaces vectoriels.
Montrer que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
Trouver un exemple simple prouvant que l'on a pas l'inclusion inverse en général.
Que peut-on dire de $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ et $\text{Ker}(f + g)$?

Exercice 49 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.
On note $\tilde{f} = f_{|\text{Im}(f)}$ la restriction de f à $\text{Im}(f)$.

1. Vérifier que $\tilde{f} \in \mathcal{L}(E)$: on dit que la restriction de f à $\text{Im}(f)$ induit bien un endomorphisme de $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer $\text{Ker}(\tilde{f})$ et $\text{Im}(\tilde{f})$ en fonction de $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f \circ f)$.
3. Etablir que $\tilde{f}$ est un automorphisme de $\text{Im}(f)$ si et seulement si $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$.

Exercice 50 Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, une application linéaire *injective.*
On rappelle qu'une famille $\mathcal{L} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ de vecteurs d'un ev E est libre si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul est la combinaison triviale, autrement dit :
$(\mathcal{L} = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ est libre$) \Leftrightarrow (\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$.

1. Soit $\mathcal{F}$, une famille libre de vecteurs de E. Montrer que son image $\varphi(\mathcal{F})$ est une famille libre de vecteurs de F.
2. Montrer que, si G et H sont deux sous-espaces supplémentaires de E, alors $\varphi(G)$ et $\varphi(H)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\varphi(E)$. Autrement dit : $G \oplus H = E \Rightarrow \varphi(G) \oplus \varphi(H) = \varphi(E)$.

Exercice 51 Soit E, F deux ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
On rappelle qu'une famille $\mathcal{L} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ de vecteurs d'un ev E est libre si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul est la combinaison triviale, autrement dit :
$(\mathcal{L} = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ est libre$) \Leftrightarrow (\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$.

1. Montrer que : φ est injective si et seulement si φ transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
2. Montrer que : φ est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E dont l'image par φ est génératrice de F.

Exercice 52 Soit u, un endomorphisme de l'espace vectoriel E (i.e) $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F et G, deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer : $(\ u(F) = u(G)\ ) \Leftrightarrow (\ F + \text{Ker}\ u = G + \text{Ker}\ u\ )$.

Exercice 53

1. Soit u et v , deux endomorphismes de E. Montrer que :
   (a) $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v \circ u)$, puis $(\ \text{Ker}(u) = \text{Ker}(v \circ u)\ ) \Leftrightarrow \Big(\ \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(v) = \{\vec{0}_E\}\ \Big)$.
   (b) $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$, puis $(\ \text{Im}(v \circ u) = \text{Im}(v)\ ) \Leftrightarrow (\ \text{Im}(u) + \text{Ker}(v) = E\ )$.
2. Soit u un endomorphisme de E. Pour tout entier $k \geq 0$, on définit $N_k = \text{Ker}\ u^k$ et $I_k = \text{Im}\ u^k$.
   (a) Montrer que la suite $(N_k)_{k\geq 0}$ est croissante et la suite $(I_k)_{k\geq 0}$ décroissante (dans $\mathcal{P}(E)$ au sens de l'inclusion).
   (b) Montrer que, si $N_k = N_{k+1}$ alors $N_{k+1} = N_{k+2}$.
   De même, montrer que, si $I_k = I_{k+1}$ alors $I_{k+1} = I_{k+2}$.
   (c) En déduire que $(N_k)_{k\geq 0}$ est strictement décroissante *ou* stationnaire, et que $(I_k)_{k\geq 0}$ est strictement décroissante *ou* stationnaire.
   (d) Si $(N_k)_{k\geq 0}$ est stationnaire, on note $r = \text{Min}\{k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1}\ \}$.
   Montrer que $N_r \cap I_r = \{\vec{0}_E\}$.
   (e) Si $(I_k)_{k\geq 0}$ est stationnaire, on note $s = \text{Min}\{k \in \mathbb{N} \mid I_k = I_{k+1}\ \}$.
   Montrer que $N_s + I_s = E$.

Exercice 54 Soit E, F et G, trois $\mathbb{K}$-ev, et des applications $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer l'équivalence : $(\ g \circ f = 0\ ) \Leftrightarrow (\ \text{Im}f \subset \text{Ker}g\ )$.

2. Montrer les équivalences :

$$(\ g \circ f \text{ injective }) \Leftrightarrow (\ \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}_E\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} g = \{\vec{0}_F\}\ ).$$
$$(\ g \circ f \text{ surjective }) \Leftrightarrow (\ \mathrm{Im} g = G \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} g = F\ ).$$

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante de bijectivité de $g \circ f$.

Exercice 55 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev : on fixe $g \in \mathcal{L}(E)$. On définit $\Phi_g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & \Phi_g(f) := g \circ f \end{array} \right.$.

1. Montrer que $\Phi_g \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E), \mathcal{L}(E))$.
2. Montrer que, si g est injective, alors Φ_g est injective.
3. Prouver que la réciproque est également vraie.

Exercice 56 Soit u, un endomorphisme nilpotent de E d'indice $n \geq 2$ (i.e) $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que la famille $(\vec{x}, u(\vec{x}), u^2(\vec{x}), \ldots, u^{n-1}(\vec{x}))$ soit libre.
Que peut-on dire de n si $E = \mathbb{R}^2$?

Exercice 57 Soit E et F, deux espaces vectoriels, et des applications $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

1. Que peut-on dire de $u \circ v$ (calculer $(u \circ v) \circ (u \circ v)$) ?
2. Montrer que $F = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.

Exercice 58

Soit f, un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E tel que, pour tout $\vec{x}$ de E, la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est liée.
Vérifier que cela signifie : $\forall \vec{x} \in E,\ \exists \lambda_{\vec{x}} \in \mathbb{K},\ f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}} \vec{x}$.
Montrer que f est une homothétie, autrement dit que f vérifie : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \vec{x} \in E,\ f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
Indication : pour $\vec{a} \neq \vec{0}$ fixé et $\vec{x}$ de E, considérer $\lambda_{\vec{a}}$, $\lambda_{\vec{x}}$ et $\lambda_{\vec{a}+\vec{x}}$ et séparer les cas $(\vec{a}, \vec{x})$ libre ou liée.

Exercice 59 Soit f et g des endomorphismes d'un ev E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ et $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 60 Soit un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \{\vec{0}\}$.
Montrer que, si $\vec{x} \notin \mathrm{Ker}\varphi$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(\vec{x}) \neq \vec{0}$.

Exercice 61 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et H, un sev de E.

1. Prouver que $f(H)$ est un sev de F.
2. Prouver $f^{-1}(f(H)) = H + \mathrm{Ker} f$.

Exercice 62 Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev : on considère des applications linéaires $E \underset{f}{\to} F \underset{g}{\to} G$.
Prouver les équivalences :

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}_F\}$.
2. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff F = \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 63 Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev : on considère des applications $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Soit F', un sev de F. Montrer :
   (a) $u(u^{-1}(F')) = F' \cap \mathrm{Im}(u)$.
   (b) $v^{-1}(v(F')) = F' + \mathrm{Ker}(v)$.
2. En déduire :
   (a) $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = u(\mathrm{Ker}(v \circ u)$.
   (b) $\mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u) = v^{-1}(\mathrm{Im}(v \circ u)$.
   (c) $\mathrm{Ker}(v \circ u) = u^{-1}(\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u))$.
   (d) $\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u))$.
3. En déduire
   (a) $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \iff \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{\vec{0}\}$.
   (b) $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v) \iff F = \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u)$.

Formes linéaires

Exercice 64 Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f une forme linéaire non nulle sur E ($f \neq 0$ i.e $f \neq \vec{0}_{E^*}$). Il existe donc au moins un $\vec{x}_0$ dans E tel que $f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}_E$: on le prend !

1. Montrer que f est surjective.
2. On note $H = \mathrm{Ker}(f)$ *(hyperplan)*. Montrer que $E = H \oplus \mathrm{vect}(\vec{x}_0)$.

Exercice 65 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev. On considère deux formes linéaires sur f et g sur E ($f \in E^*$, $g \in E^*$ où $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$). On suppose qu'elles vérifient : $\forall \vec{x} \in E,\ f(\vec{x}) \times g(\vec{x}) = 0$.
Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$ (où $0 = \vec{0}_{E^*}$ représente ici la forme linéaire nulle sur E).
Indication : on demande donc de prouver « $(\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = \vec{0})$ ou $(\forall \vec{x} \in E, g(\vec{x}) = \vec{0})$ ». On pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 66 On note ici $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour tout réel a, on définit l'application $\varphi_a : \left| \begin{array}{rcl} E = \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \varphi_a(P) := P(a) \end{array} \right.$.

1. Vérifier que, pour tout a réel, φ_a est une forme linéaire sur E.
2. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n réels distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \ldots, \varphi_{a_n})$ est une famille libre dans l'espace vectoriel $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Ceci permet donc d'affirmer que la famille infinie $(\varphi_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

3. Ce résultat subsiste-t-il si l'on remplace $E = \mathbb{R}[X]$ par $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 67 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev non trivial. Montrer :
$\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2 : (\vec{x} \neq \vec{y}) \Rightarrow$ (il existe une forme linéaire φ telle que $\varphi(\vec{x}) \neq \varphi(\vec{y})$).
Indication : considérer un projecteur p de base vect$(\vec{x}-\vec{y})$ et vérifier que l'application (forme linéaire ?) φ définie par $p(\vec{z}) = \varphi(\vec{z})(\vec{x} - \vec{y})$ (pour tout $\vec{z} \in E$) est une solution.

Exercice 68 On considère l'espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, on définit l'application $\Phi_k : E \to \mathbb{R}$ par : $\forall f \in E,\ \Phi_k(f) := f^{(k)}(0)$.

1. Montrer que, pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, l'application Φ_k une forme linéaire sur E.
2. Montrer que le système $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ est libre dans l'espace dual $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$.
   Indication : considérer les fonction puissances P_k définies sur $\mathbb{R}$ par $P_k(x) = x^k$, calculer leurs dérivées successives, et vérifier que $\Phi_i(P_k) = 0$ si $i \neq k$, et $\Phi_k(P_k) =?$

Projecteurs - Symétries

Exercice 69 Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, on définit l'application E = partie entière.

1. Vérifier que $E \circ E = E$.
2. E est-elle un projecteur de l'espace $\mathbb{R}$?

Exercice 70 Soit p et s, le projecteur et la symétrie sur/par rapport à F et parallèlement à G, où F et G sont deux sev supplémentaires d'un ev E. Que valent $p \circ s$? $s \circ p$?

Exercice 71 Soit p, un projecteur d'un $\mathbb{K}$-ev E. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur le scalaire λ l'application λp est-elle un projecteur ? Dans ces cas, comparer les noyaux et images de ces deux projecteurs.

Exercice 72

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y, z) = (x, y)$.
   f est-il un projecteur ? Si oui, préciser sa base et sa direction.
2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $g(x, y, z) = (x + z, y + z, 0)$.
   g est-il un projecteur ? Si oui, préciser sa base et sa direction.

Exercice 73 Soit le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathbb{R}^2$. On définit $\vec{u}_1 = (1, 1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 3)$.

1. Vérifier que $F = \text{vect}(\vec{u}_1)$ et $G = \text{vect}(\vec{u}_2)$ sont des sev supplémentaires dans E.
2. Calculer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G. Comment peut-on vérifier la cohérence du résultat ?

3. Calculer l'expression de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.
   Et de la symétrie t par rapport à G, parallèlement à F ?

Exercice 74 Soit le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathbb{R}^3$. On définit $\vec{u}_1 = (1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (1,1,0)$ et $\vec{u}_3 = (1,1,1)$.

1. Vérifier que $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $G = \text{vect}(\vec{u}_3)$ sont des sev supplémentaires dans E.
2. Calculer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G. Comment peut-on vérifier la cohérence du résultat ?
3. Calculer l'expression de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.
   Et de la symétrie t par rapport à G, parallèlement à F ?

Exercice 75 Dans $E = \mathbb{R}^3$, on définit les sous-espaces $F = \{(x,y,z) \in E \mid x+y-z=0\}$ et $G = \text{vect}((1,1,1))$.
Montrer le projecteur p de base F et de direction G est bien défini, ainsi que la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.
Déterminer $p((2,2,3))$, $s((2,2,3))$ et plus généralement $p((a,b,c))$ et $s((a,b,c))$.

Exercice 76 On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}$. On définit l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{1}{2}z + \dfrac{i}{2}\overline{z} \end{array} \right. .$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que f est un projecteur de E.
3. Déterminer $\text{Ker}(f)$. Vérifier que c'est une droite vectorielle.
4. Déterminer $\text{Im}(f)$. Vérifier que c'est une droite vectorielle (rappel : ici, $z \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \cdots$).

Exercice 77 On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}$. On définit l'application

$$p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & p(z) = \overline{z} - jz \end{array} \right.$$

où, bien entendu j désigne la célèbre racine cubique de l'unité ($j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

1. Montrer que p est un endomorphisme de E.
2. Montrer que p est un projecteur de E.
3. Déterminer $\text{Ker}(p)$. Vérifier que c'est une droite vectorielle.
4. Déterminer $\text{Im}(p)$. Vérifier que c'est une droite vectorielle.

Exercice 78 Soir $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et l'application S, définie par :

$$\forall f \in E,\ S(f) = g \text{ où, } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(1-x).$$

1. Montrer que S est une symétrie vectorielle de E.

2. On définit l'application P par : $\forall f \in E$, $P(f) = g$ où, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(1-x))$. Montrer que P est un projecteur de E.
3. Préciser des vecteurs non triviaux du noyau et de l'image de P.

Exercice 79 Soit $E = C^0([-1,+1], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,+1]$.
Pour f_1 et f_2 dans E, on pose $s(f_1, f_2) := \displaystyle\int_{-1}^{+1} f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t$.

Soit $g \in E$ telle que $g \neq 0 = \vec{0}_E$: justifier $s(g,g) \neq 0$. Pour tout $f \in E$, on pose $P_g(f) := \dfrac{s(f,g)}{s(g,g)} g$.

1. Montrer que P_g est un projecteur.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(P_g)$ et $\mathrm{Ker}(P_g)$.
3. On admet le résultat suivant : si p et q sont deux projecteurs, alors $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$. En déduire une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur f et g pour que $P_f + P_g$ soit un projecteur.

Exercice 80 Soit u et v, deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent (i.e) tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer le noyau et l'image de v sont stables par u.
2. Soit p, un projecteur de E.
   Prouver l'équivalence : ($u \circ p = p \circ u$) $\Leftrightarrow$ (Ker p et Im p sont stables par u).

Exercice 81 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev et p un projecteur de E. On définit $\mathcal{A}$ = l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec p, autrement dit $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ p = p \circ f\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{K}$-ev.
2. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, prouver l'équivalence : $(f \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow$ ($\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par f).

Exercice 82 Soit f, un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev vérifiant $f = \alpha p + \beta q$, où p et q sont des projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p = 0$ et α, β des scalaires.
Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression simple de f^n.

Exercice 83

Sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définit l'application φ par : $\forall f \in E$, $\varphi(f) = \hat{f}$, où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.
Montrer que φ est un projecteur de E, dont on déterminera la base et la direction.

Exercice 84 Soit p un projecteur de E, et un scalaire λ différent de 0 et de 1.
On pose $f = p - \lambda \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est un automorphisme de E.
<u>Indication</u> : chercher f^{-1} sous la forme d'une combinaison linéaire de p et Id_E.

Exercice 85

Soit p, un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On pose $q = \mathrm{Id}_E - p$ et $s = p - q$.

1. Montrer que q est un projecteur et s une symétrie.
2. On pose $L = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \exists f \in \mathcal{L}(E),\ u = f \circ p\}$ et $M = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \exists f \in \mathcal{L}(E),\ u = f \circ q\}$. Montrer que L et M sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 86 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev, et soit p et q deux projecteurs de l'ev E.

1. Montrer que p et q ont même image si et seulement si $(p \circ q = q$ et $q \circ p = p)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que p et q aient la même direction, c'est à dire le même noyau. Pour cela, on pourra poser $p' = \mathrm{Id} - p$ et $q' = \mathrm{Id} - q$ (projecteurs associés), vérifier que p' et q' sont des projecteurs dont on identifiera les noyaux et images, puis utiliser la question précédente.
3. Montrer que l'endomorphisme $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 87 Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

1. Montrer qu'on a les équivalences :
($p + q$ est un projecteur) $\Leftrightarrow$ ($p \circ q + q \circ p = 0$) $\Leftrightarrow$ ($p \circ q = q \circ p = 0$).
2. Dans ce cas (i.e) en supposant que $p + q$ est un projecteur, montrer que :
$$\mathrm{Im}(\ p + q\ ) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(\ p + q\ ) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q).$$
Indication : si φ est un projecteur, $(\vec{x} \in \mathrm{Im}(\varphi)) \Leftrightarrow \cdots$.

Exercice 88 Soit p et q deux projecteurs de E qui commutent (i.e) tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, puis que :
$$\mathrm{Ker}(\ p \circ q\ ) = \mathrm{Ker} p + \mathrm{Ker} q \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\ p \circ q\ ) = \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q.$$
2. On pose $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur, puis déterminer son noyau et son image.

Exercice 89 Soit p et q des projecteurs d'un ev E tels que $p \circ q = 0$. On pose $r = p + q - q \circ p$. Montrer que r est un projecteur et que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 90 Soit u et v deux endomorphismes de E. Montrer que l'on a l'équivalence :
$$(\ u \circ v = u \text{ et } v \circ u = v\ ) \Leftrightarrow (\ u \text{ et } v \text{ sont des projecteurs et } \mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ v\ )$$

Exercice 91 Soit f et g, deux endomorphismes d'un ev E. Prouver l'équivalence :
$$(f \circ g = g \text{ et } g \circ f = f) \Leftrightarrow (f \text{ et } g \text{ sont des projecteurs et } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)).$$

Exercice 92 Soit $\mathcal{P}$, l'ensemble des projecteurs d'un espace vectoriel E.

1. On définit sur $\mathcal{P}$ la relation $\leq$ par :
$$(\ p \leq q\ ) \Leftrightarrow (\ p \circ q = q \circ p = p\ ).$$
Démontrer que $\leq$ est une relation d'ordre.

2. Soit p et q dans $\mathcal{P}$ tels que $p \circ q = q \circ p$. Démontrer $\{p, q\}$ admet une borne inférieure i et une borne supérieure s et que :
$$\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$$

Exercice 93 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev, et u un endomorphisme de E ($u \in \mathcal{L}(E)$). Prouver l'équivalence :
$$(\text{ il existe un projecteur } p \text{ tel que } u = p \circ u - u \circ p\ ) \Leftrightarrow (\ u^2 = 0\ ).$$
Indication : pour $\Rightarrow$, prouver d'abord $p \circ u \circ p = 0$ puis $u \circ p = 0$ et conclure. Pour $\Leftarrow$, justifier l'existence de H_1, sev de E vérifiant $\mathrm{Im}(u) \subset H_1 \subset \mathrm{Ker}(u)$. On choisit alors H_2 un supplémentaire quelconque de H_1 : vérifier que p, projecteur de base H_1 et direction H_2 est une solution du problème.

L'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$

Exercice 94 Déterminer $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}))$ (les espaces étant considérés comme des $\mathbb{R}$-ev).

Exercice 95

1. Montrer que l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une algèbre.
2. Montrer que l'ensemble des suites convergentes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une algèbre.
3. Montrer que l'ensemble des suites convergentes et de limite nulle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas une algèbre.
4. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions $[s_n : x \mapsto \sin nx]$ et $[c_n : x \mapsto \cos nx]$ pour $n \in \mathbb{N}$, est une algèbre.

Exercice 96 On dit qu'un élément a d'une algèbre A est **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

1. Montrer que, si a est nilpotent, alors $1 - a$ est inversible.
2. Montrer que, si a et b sont deux éléments nilpotents qui commutent (i.e $a \times b = b \times a$), alors $a \times b$ et $a + b$ sont nilpotents.
3. Soit a et b, deux éléments de A : montrer que, si $a \times b$ est nilpotent, alors $b \times a$ est nilpotent.

Exercice 97 Soit u un endomorphisme nilpotent de E (i.e) il existe $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$.

1. Un exemple : soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y + z, z, 0)$.
   (a) Préciser les noyaux et images de f, de f^2.
   (b) Déterminer f^3. Conclusion ?
2. On suppose que E n'est pas réduit à son vecteur nul. Montrer que u n'est pas un isomorphisme de E, mais que $(\mathrm{Id}_E - u)$ et $(\mathrm{Id}_E + u)$ sont des isomorphismes de E. Réciproques ?
3. Montrer que si v est un autre endomorphisme nilpotent de E commutant avec u (i.e) tel que $u \circ v = v \circ u$, alors $u \circ v$ et $u + v$ sont également nilpotents.
4. Soit f et g deux endomorphismes de E. Montrer que : ($g \circ f$ nilpotent) $\Leftrightarrow$ ($f \circ g$ nilpotent) .

Exercice 98 Soit u, un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E (i.e) $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit alors l'ensemble $C(u)$ des endomorphismes de E qui commutent avec u : $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$ (le *commutant* de u).

1. Montrer que $C(u)$ est un ev.
2. Déterminer $C(\mathrm{Id}_E)$, $C(\tilde{0}_{\mathcal{L}(E)})$, $C(\alpha.\mathrm{Id}_E)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$.
3. Que peut-on dire de l'ensemble $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{u \in \mathcal{L}(E)} C(u)$?

Exercice 99

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est liée, autrement dit (le justifier) il existe λ_x dans $\mathbb{K}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_x \vec{x}$. Montrer que f est une homothétie.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ et p, un projecteur de base F et de direction G.
   Montrer que g et p commutent si et seulement si F et G sont stables par g .
3. Soit f, un élément du centre de $\mathcal{L}(E)$, (i.e) vérifiant : $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ u \circ f = f \circ u$.
   En considérant pour u une projection bien choisie, montrer que f vérifie la propriété de la première question (on rappelle que tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire).
4. Quel est le centre de $\mathcal{L}(E)$?

Exercice 100 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ fixé.
On considère alors l'ensemble $\mathcal{D} := \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

1. Quelle est la structure de l'ensemble $\mathcal{D}$?
2. Rappeler la caractérisation de $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ utilisant un certain noyau et une certaine image.
3. Trouver des conditions suffisantes pour que l'on ait $\mathcal{D} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.
4. Trouver des conditions suffisantes pour que l'on ait $\mathcal{D} = \mathcal{L}(E)$.

Exercice 101 Soit f, un endomorphisme fixé d'un ev E : on définit $\Phi_f : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto & \Phi_f(g) := f \circ g \end{array} \right.$.

1. Vérifier que Φ_f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ (i.e) $\Phi_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
2. Montre que l'on a l'équivalence : (f est nilpotente) $\Leftrightarrow$ (Φ_f est nilpotente).
   <u>Indication</u> : il y a un sens évident. Pour l'autre, remarquer $\Phi_f^k(\mathrm{Id}_E) = ?$

Exercice 102 Pour f, endomorphisme fixé de E, on définit sur $\mathcal{L}(E)$ l'application Φ_f par : $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \Phi_f(g) = f \circ g - g \circ f$.

1. Montrer que Φ_f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ (i.e) $\Phi_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
2. On définit l'application $\Phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E)),\ f \longmapsto \Phi(f) := \Phi_f$.
   Montrer que Φ est une application linéaire (i.e) $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E), \mathcal{L}(\mathcal{L}(E)))$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(\varphi_f)^n(g) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g \circ f^k$ *(récurrence sur n).*
   En déduire que, si f est nilpotente, alors φ_f est également nilpotente.
4. Que pensez-vous de la réciproque du résultat précédent (examiner le cas $f = \mathrm{Id}_E$) ?

Exercice 103 Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E vérifiant : $f\circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$ et $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^{n-1}$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, les familles $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ et $(\mathrm{Id}_E, g, g^2, \cdots, g^{n-1})$ sont libres dans $\mathcal{L}(E)$.
3. *(pour plus tard)* En déduire que E ne peut pas être de dimension finie.
4. Vérifier que, dans $E = \mathbb{R}[X]$ avec $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$, f et g vérifient les hypothèses .

Exercice 104 Soit f, un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev tel que $f \neq \pm \mathrm{Id}_E$ et $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

1. Un exemple : vérifier qu'avec $E = \mathbb{R}^2$, l'application f définie par $f(x, y) := (2x - 3y, x - 2y)$ est un exemple illustrant cette situation.
2. On revient au cas général : dans $\mathcal{L}(E)$, vérifier que $\mathcal{F} = \mathrm{vect}(\mathrm{Id}_E, f)$, l'espace engendré par f et Id_E, est un plan.
3. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(f) \in \mathcal{F}$.
4. Montrer que $(\mathcal{F}, +, \circ)$ est un corps.

Exercice 105 Soit f et g deux endomorphismes d'un ev E.
Prouver l'équivalence : ($(\mathrm{Id}_E - f \circ g)$ est injective) $\Leftrightarrow$ ($(\mathrm{Id}_E - g \circ f)$ est injective).
Indication : prouver une contraposée. En prenant $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - f \circ g)$, que dire de $\vec{y} = g(\vec{x})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - g \circ f)$?

Exercice 106 (***) Soit F et G, deux sev supplémentaires d'un ev E.
On définit l'ensemble $\Gamma = \{\varphi \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Ker}(\varphi) = F \text{ et } \mathrm{Im}(\varphi) = G\}$.

1. Prouver que Γ est non vide.
2. Montrer que, si φ appartient à Γ, alors φ *induit* un automorphisme $\widehat{\varphi}$ sur G.
3. Montrer que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe (ATTENTION : le neutre ici n'est pas Id_E, pour des raisons évidentes, mais $p =$ le projecteur de base G, direction F !!!).

Exercice 107 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E tel qu'il existe un *unique* $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. On définit $g' = g \circ f - \mathrm{Id}_E + g$: simplifier $f \circ g'$.
2. Comparer alors g et g'.
3. En déduire que f est bijective.