DÉRIVATION - CONVEXITÉ

DÉRIVATION

Exercice 1
Soit f, une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Que peut-on dire de f' si f est paire ? impaire ? T-périodique ?
2. Que peut-on dire de f si f' est paire ? impaire ? T-périodique ?

On rappelle : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2 Calculer le nombre dérivée au point a de la fonction f définie par :
$f(x) = x^2$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^n$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \tan(x)$.

Exercice 3 Soit f et g, deux fonctions dérivables en $a \in I$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} \right)$.

Exercice 4 Soit f dérivable en $a \in I$, intervalle ouvert.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h} \right)$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{h \to 0} \left(\frac{f^2(a + 3h) - f^2(a - h)}{h} \right)$.

Exercice 5 Soit f définie sur un voisinage de a.

1. Montrer que :
$$(\ f \text{ admet un } \mathrm{DL}_2(a) \ ) \Rightarrow (\ \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \text{ existe et est finie }).$$
2. Montrer que :
$$(\ f \text{ est dérivable en } a \text{ et } L = f'(a)) \Rightarrow (\ \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = L \ ).$$
3. Lorsque $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = L \in \mathbb{R}$ existe, on dit que f admet une *dérivée symétrique* en a (qui vaut L). Vérifier que c'est le cas si f admet une dérivée à gauche et à droite en a.

Exercice 6 On définit sur $]0, 1[$ la fonction f par $f(x) = x \exp(\dfrac{1}{\ln x})$.
Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$.

Exercice 7 On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f par $f(x) = x^2 \ln(x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f est de classe C^1 mais pas C^2 sur $[0, +\infty[$.

Exercice 8 On pose $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$: montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable en 0 et $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas !

Exercice 9 On pose $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$: montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas !

Exercice 10 On pose $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = x^{\frac{5}{2}} \sin(\frac{1}{x})$: montrer que f possède un développement limité d'ordre 2 en 0, mais que f n'est pas deux fois dérivables en 0.

Exercice 11 Etudier, suivant les valeurs du paramètre entier n, la dérivabilité de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^n \sin(\frac{1}{x})$. Etudier la dérivabilité et le caractère C^1 d'un éventuel prolongement en 0.

Exercice 12 Etudier la dérivabilité de f si $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$.

Exercice 13 On pose $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin(e^{\frac{1}{x^2}})$.
Vérifier $f(x) = o(x^n)$ en 0, pour tout entier n : f possède donc un $\mathrm{DL}_n(0)$ à tout ordre n.
Montrer que f est dérivable en 0 (avec $f'(0) = 0$) et sur $\mathbb{R}$, mais que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas !

Exercice 14 On définit, sur $]0, \frac{\pi}{2}]$: $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.
Montrer qu'on peut prolonger f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en une fonction de classe C^1 (rappel de DL classique...).

Exercice 15 On pose $f(x) = \cos(\sqrt{x})$: f est-elle dérivable en 0 ? de classe C^1, C^2 sur $[0, +\infty[$?

Exercice 16 Pour tout $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$: montrer qu'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$. Ainsi prolongée, montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, puis de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
Montrer qu'on peut prolonger f par continuité sur $]-1, +\infty[$.
Ainsi prolongée, montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$, puis de classe C^2 sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 18 On pose $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? une fois ? deux fois ?

Exercice 19 Etudier la classe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x|x|$.
Etudier la réciproque f^{-1}.

Exercice 20 Soit f, la fonction définie sur $]-1, +1[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln|x|}\cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]-1, +1[$.
2. On considère les suites u et v définies par : $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. calculer les limites des suites $(f'(u_n))$ et $(f'(v_n))$.
3. En déduire que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 21 On pose $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$: montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 22 On pose $f(x) = (x - E(x)) \ln (x - E(x))$. Quel est l'ensemble de définition de f ? Montrer que f est périodique, puis prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$: ainsi prolongée, f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 23 Etudier la dérivabilité et exprimer la dérivée de f si :
$f(x) = \ln(\ln(\ln x))$? $f(x) = |x^2 - 1|$? $f(x) = \arcsin(2\sqrt{x - x^2})$? $f(x) = \sqrt{x^3}$? $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x)}$?

Exercice 24 Trouver une expression de la somme : $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.

Exercice 25 Soit $f(x) = P(\frac{1}{1-x}) \exp(\frac{1}{1-x})$, où $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $f'(x) = Q(\frac{1}{1-x}) \exp(\frac{1}{1-x})$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$. Quelle relation y-a-t'il entre P et Q ?

Exercice 26 En utilisant la notion de nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to e} \frac{\sin(x) - \sin(e)}{\ln(x) - 1}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin^2(x) - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x) - \sin(\frac{1}{x})}{\exp(x) - \exp\frac{1}{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(a)}{x^2 - a^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{x^x - 5^5}{x - 5}$
6. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{5^x - x^5}{x - 5}$
7. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin(x)) - \ln(\cos(x))}{\sin(x) - \cos(x)}$

Exercice 27 Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in]0, +\infty[$ pour que $f : \left| \begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} \text{ si } x \in]0, x_0[\\ x^2 + 12 \text{ si } x \in [x_0, +\infty[\end{cases} \end{array} \right.$

soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 28 Montrer qu'on peut prolonger en 0 les fonctions suivantes en des fonctions de classe C^1 sur I :
1. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $I = \mathbb{R}$ 2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $I =]-1, +\infty[$. 3. $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 29 Soit f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x \text{ si } x < 0 \\ -\ln(1 + x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$
Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Etudier alors la dérivée seconde $f^{(2)}$.

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Exercice 30

Calculer la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f, où $f(x) = x^n(x-1)^n$, puis, en examinant le coefficient de x^n, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$. Indication : on trouve $\displaystyle\binom{2n}{n}$.

Exercice 31 Calculer les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ $f^{(n)}$ de la fonction f si :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$
4. $f(x) = e^x \sin(x)$
5. $f(x) = \sin(x)$ sous la forme $\sin(x + a_n)$
6. $f(x) = (2x-1)e^{3x}$
7. $f(x) = x^2(1+x)^n$
8. $f(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)$ *(linéariser)*
9. $f(x) = x^2 \ln(x)$
10. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$
11. $f(x) = (x^3+x^2+1)e^{-x}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$

Exercice 32 Déterminer la dérivée $n^{\text{ièmes}}$ $f_n^{(n)}$ de la fonction f_n où $f_n(x) = x^{n-1}\ln(x)$. On commencera par prouver par récurrence qu'elle est de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n}{x}$. On trouvera : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 33 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \exp(\frac{-1}{x^2})$. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
Montrer que ses dérivées sont de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(\frac{-1}{x^2})$ où P_n est un polynôme.
En déduire que f se prolonge en 0 en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.
Donner le développement limité de f en 0 à tout ordre n.
On commencera par justifier : $\frac{1}{x^k} \underset{0}{\ll} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout entier k.

Exercice 34 On pose $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$: montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, il existe deux constantes a_n et b_n telles que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f soit de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n + b_n \ln x}{x^{n+1}}$ (on le prouvera de deux façons différentes). Donner le maximum d'informations sur les suites (a_n) et (b_n).

Exercice 35 On considère f, définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer f'.
2. Exprimer $(1-x^2)f'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire une relation entre $f^{(n)}$, $f^{(n+1)}$ et $f^{(n+2)}$.
3. Calculer $f^{(n)}(0)$. Montrer que les dérivées successives sont positives sur $[0,1[$

Exercice 36 On considère f, définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]-1,+1[$, et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ où P_n est une fonction polynômiale.

2. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$: $P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + (2n+1)xP_n(x)$.
3. Montrer, pour tout $x \in]-1,1[$: $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0$.
   En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$: $P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) - n^2(1-x^2)P_{n-1}(x) = 0$.
4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$: $P_n'(x) = n^2 P_{n-1}(x)$.
5. En déduire, pour tout $n \geq 2$ et $x \in]-1,1[$: $n^2P_n(x) - (2n-1)xP_n'(x) - (1-x^2)P_n''(x) = 0$.
6. Calculer $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37 Soit f, la fonction définie pour tout réel $x \neq 1$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1. (a) Justifier pourquoi f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$P_{n+1}(x) = (1-x)P_n'(x) + (n+2-x)P_n(x).$$
   (c) Donner les expressions de P_0, P_1, P_2.
   Donner le terme de plus haut degré de P_n (degré et coefficient dominant).
   (d) Calculer $P_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$, on a :
   $$(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0.$$
   (b) Enoncer la formule de Leibniz.
   (c) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$P_{n+1}(x) = (n+2-x)P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x).$$
   (d) Montrer alors que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité des polynômes :
   $$P_n' = -nP_{n-1}.$$
3. Montrer que, pour $n \geq 1$, P_n n'a que des racines simples.

Exercice 38 Soit $f : [\frac{\pi}{2}, \pi[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$. Montrer que f possède une fonction réciproque, que l'on notera g. Préciser l'ensemble de définition et le domaine de dérivabilité de g. Calculer g'.

Exercice 39 On pose $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$: montrer que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

Exercice 40 Soit $f(x) = \tan x$: à l'aide de la formule de Leibniz et de la relation connue $f' = 1+f^2$, déterminer un algorithme de calcul de $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Exercice 41 Soit f, une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que f' est bornée sur I. Montrer que f est lipschitzienne sur I.

Exercice 42 Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Exercice 43 Montrer : $\forall x, y \in [-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}],\ |\tan x - \tan y| \leq 2|x - y|$.

Exercice 44 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x|$.

Exercice 45 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ |1 - \cos(x)| \leq |x|$.

Exercice 46 Montrer : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[,\ |\tan x| \geq |x|$.

Exercice 47 Montrer : si $0 < x < y$, alors $0 < \ln y - \ln x \leq \frac{1}{x}(y - x)$.

Exercice 48 Montrer que, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $1 \leq \dfrac{\tan(x)}{x} \leq (1 + \tan^2(x))$.
En déduire une approximation de $\tan(0.1)$ à 10^{-2} près. Commencer par justifier $0 < \tan(0.1) < 1$.

Exercice 49 Montrer que, pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(1 + \dfrac{1}{x}) \leq \dfrac{1}{x}$.

Exercice 50 Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$: $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1 + x) \leq x$.

Exercice 51 A l'aide du théorème des accroissements finis, étudier, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(\arctan(x + a) - \arctan x)$.

Exercice 52 A l'aide du T.A.F, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

Exercice 53 Trouver les extremas de la fonction f avec $f(x) = x^4 - x^3 + 1$.

Exercice 54 Soit f, une fonction définie et de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ (avec $a < b$).

1. On suppose que $[a, b]$ est stable par f : justifier l'existence d'un (au moins) point fixe pour f sur $[a, b]$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Justifier l'existence de cette suite.
3. Justifier que la dérivée f' de f est bornée sur $[a, b]$: on a donc $M = \operatorname{Sup}\limits_{[a,b]}(|f'|) = \operatorname{Max}\limits_{[a,b]}(|f'|)$.
4. Soit α, un point fixe de f (on sait qu'il en existe au moins un).
   Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq M \times |u_n - \alpha|$.
   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq M^n \times |u_0 - \alpha|$.

5. On suppose désormais que $0 \leq M < 1$: commencer par justifier que f possède, sous cette hypothèse, un et un seul point fixe, puis montrer que la suite (u_n) converge. Déterminer sa limite.

Exercice 55 On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \exp(-u_n)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{e}, 1]$, puis que (u_n) converge. On note L sa limite : comment obtenir une valeur approchée de L à 10^{-3} près ?

Exercice 56 On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}\cos(u_n)$. Montrer que (u_n) converge. On note L sa limite : comment obtenir une valeur approchée de L à 10^{-3} près ?

Exercice 57 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{5} = \dfrac{2}{5}\mathrm{ch}(x)$.

1. Montrer que f possède, sur $[0, 1]$, un point fixe et un seul noté α.
2. Montrer, pour tout $a, b \in [0, 1]$: $|f(b) - f(a)| \leq \frac{8}{15}|b - a|$.
3. On définit la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 58 On définit la suite u par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.
Montrer : $\forall n \geq 0$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{8}{9}|u_n - 1|$, en déduire la convergence et la limite de la suite u.

Exercice 59 Soit f définie par $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$.

1. Montrer que f possède un et un seul point fixe, noté α. Vérifier $\alpha \in]0, 1[$.
2. Soit u, la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$: $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$.
3. Comment obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?.

Exercice 60 Soit, pour $x \in [-1, +1]$, $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Arccos}(x)$ et la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et qu'il existe un réel k tel que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $|f'(x)| \leq k < 1$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
4. Prouver que la suite u converge vers α.
5. Pour quelle valeur de n peut-on affirmer que le terme u_n est une valeur approchée de α à 10^{-5} près ?

Exercice 61 Soit $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$.

1. Etudier la parité de f. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
2. On pose $f(0) = a$: montrer qu'on peut choisir a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, prouver que f est de classe C^1, puis C^2 sur $\mathbb{R}$. Valeurs de $f'(0)$? $f''(0)$?
3. Justifier que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$, puis vérifier que $\alpha \in]0, 1[$. On donne : $\mathrm{sh}(1) > 1$.
4. (a) Etudier le signe de $\varphi(t) = \mathrm{ch}(t) - t$.
   (b) Démontrer : $\forall t \geq 0$, $0 \leq t\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t) \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}^2(t)$.
5. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
6. On définit : $u_0 = 0$ puis $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite u converge vers α.
7. Comment obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

Exercice 62

1. Montrer : pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire, pour p entier naturel fixé, la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}$.
3. En déduire la divergence de la suite $(h_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$. Préciser un équivalent simple de (h_n).
4. On pose $d_n = h_n - \ln(n)$: montrer que la suite (d_n) est décroissante et minorée. Conclusion ?

Exercice 63

1. Montrer que, pour tout $x > 1$: $\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(x)) < \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
2. En déduire la divergence vers $+\infty$ de la suite (S_n) où $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. Comment en trouver un équivalent simple ?

Exercice 64 On définit la suite (S_n) par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$: $\dfrac{1}{1+(1+x)^2} < \arctan(x+1) - \arctan(x) < \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. En déduire que la suite (S_n) est convergente : préciser un encadrement de sa limite.

Exercice 65 Soit f, une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et $c \in \mathbb{R}$: a-t-on nécessairement l'existence de a et b réels distincts tels que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$? (examiner $f(x) = x^3$, $c = 0$).

Exercice 66 A l'aide du théorème de Rolle, montrer que le polynôme $P = X^4 + aX + b$, avec

a et b réels, possède au plus deux racines réelles.
Plus généralement, soit $Q = X^n + aX + b$ avec $n \geq 2$. Montrer que Q a au plus deux racines réelles distinctes si n est pair, et au plus trois racines réelles distinctes si n est impair.

Exercice 67 Soit f, une application dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : introduire $g = f \circ \tan$ convenablement prolongée sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 68
Soit f, une application continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que $\lim\limits_{+\infty} f = f(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$ (commencer par prouver que f est bornée, atteint ses bornes puis penser au TVI avant Rolle).

Exercice 69 Soit f, une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R}) = [m, M]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ vérifiant : $f(c+1) = f(c) + f'(c)$. Indication : et si on utilisait le TVI, tout simplement ?

Exercice 70

1. Soit f, une application dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$.
   Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.
   Indication : introduire $T(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ convenablement prolongée sur $[a, b]$.
2. Soit g, une application dérivable sur $[0, 1]$, telle que $g(0) = g'(0) = g(1) = 0$. Montrer qu'il existe un point de la courbe de g, d'abscisse dans $]0, 1[$ en lequel la tangente passe par l'origine du repère.

Exercice 71 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable vérifiant $f(a) = f(b) = 0$ (où $a < b$ sont fixés). Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{R}$ avec $d \notin [a, b]$, il existe une tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f passant par le point de coordonnées $(d, 0)$.

Exercice 72 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^∞.

1. Montrer que, si f s'annule en n points, alors f' s'annule en $n - 1$ points.
2. Soit a_1, a_2, …, a_n des zéros de f et un point $x \in I$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que :
   $$f(x) = \frac{(x - a_1) \dots (x - a_n)}{n!} f^{(n)}(c).$$
   Indication : considérer $\varphi(t) = f(t) - K(t - a_1) \dots (t - a_n)$ avec K constante bien choisie et la question précédente.
3. Existe-t-il un polynôme P et une partie infinie E de $\mathbb{R}$ tels que : $\forall t \in E$, $P(t) = e^t$.

Exercice 73 *Théorème des accroissements finis généralisés*
Soit f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

Montrer qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $g'(c)(f(b)-f(a)) = f'(c)(g(b)-g(a))$.
Indication : dans le cas où $g(a) \neq g(b)$, poser $\varphi(x) = f(x) - f(a) - K \times (g(x) - g(a)$, où K est un réel bien choisi.
Application : on suppose de plus que f et g s'annulent en a, et que $g'(t) \neq 0$ pour tout $t \in]a,b[$.
Montrer que, dans ce cas, $g(t) \neq 0$ pour tout $t \in]a,b[$, puis que $(\lim_a \frac{f'}{g'} = L) \Rightarrow (\lim_a \frac{f}{g} = L)$.
Exemple : calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - \cos(x) - x^2}{\mathrm{sh}(3x) - \sin(3x) - 9x^3 + x^4}$.

Exercice 74

1. Soit f et g, deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.
   On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$: justifier $g(a) \neq g(b)$ puis montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Attention de ne pas tomber dans un piège grossier.
2. En déduire *la règle de l'Hospital* : «si f et g sont dérivables au voisinage de a, si le rapport $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ et si g' ne s'annule pas au voisinage (pointé) de a, alors : $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = L$».
3. Application : calculer les limites suivantes
   $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)-\cos(x)+1}{e^x - \sqrt{1+x}}$, $\lim_{x\to 1} \dfrac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)^2}$.

Exercice 75 On rappelle qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé s'il se factorise en un produit de polynômes du premier degré. Montrer que, si P est scindé, alors son polynôme dérivé P' est également scindé.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 76 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, une fonction dérivable vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
Montrer que f est lipschitzienne sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ où $a > 0$.

Exercice 77 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, une fonction dérivable vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
On veut prouver le résultat suivant : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$?
Indication : pour tout $\varepsilon > 0$, justifier l'existence de $A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow |f'(x)| \leq \varepsilon$. Montrer qu'alors, pour tout $x \geq A$, $|\frac{f(x)}{x}| \leq \varepsilon + |\frac{f(A)}{x}|$. Conclure.

Exercice 78 Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

1. Montrer l'implication : $(\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty) \Rightarrow (\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty)$.
   La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que l'on a l'implication : $(\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0) \Rightarrow (\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0)$.
   La réciproque est-elle vraie (penser à une fonction trigonométrique) ?
3. Soit L, un réel. Montrer que l'on a l'implication : $(\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L) \Rightarrow (\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L)$.
   Montrer que ce résultat subsiste si on remplace L par $\pm\infty$.

4. Montrer l'implication : (f et f' ont une limite finie en $+\infty$) $\Rightarrow$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$).
   Que conclure de l'étude de $f(x) = \dfrac{\sin(x^3)}{x}$?
5. Montrer : si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.
   En déduire : si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = L$ où L est un réel quelconque.
   Le résultat tient-il encore si $L = +\infty$?

Exercice 79 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: on suppose que f a n zéros distincts $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. Montrer que f' a au moins $(n-1)$ zéros distincts.
2. Si on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$: montrer que $f^{(n-1)}$ a au moins un zéro dans $]a_1, a_n[$.
3. Si on suppose $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$, montrer que f' a au moins $(n+1)$ zéros distincts.

Exercice 80 Soit P, un polynôme à coefficients réels ($P \in \mathbb{R}[X]$), qui est scindé et à racines toutes simples.

1. Montrer que le polynôme dérivé P' est également scindé et à racines toutes simples.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et le polyôme $Q = P^2 + \alpha^2$. Montrer que les racines (complexes) de Q sont toutes simples. On pourra commencer par prouver que, si z est une racine d'ordre ≥ 2 de Q, alors z est nécessairement réel. Conclure à une absurdité.

Exercice 81

Soit une fonction f dérivable sur $]a, b[$ telle que $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{b^-} f = +\infty$. Montrer que $f'(]a, b[) = \mathbb{R}$.
Indication : montrer que f atteint son minimum en un point $c \in]a, b[$, et étudier les valeurs prises par la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Exercice 82 *(Egalité de Taylor-Lagrange)*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^n sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Indication : utiliser $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K$ et choisir judicieusement la valeur de la constante K de façon à pouvoir appliquer le théorème de Rolle.
Quel résultat retrouve-t-on pour $n = 0$?

Exercice 83 On donne n zéros $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ d'une fonction $f : [a_1, a_n] \to \mathbb{R}$, de classe C^{n-1}. On suppose de plus que $f^{(n-1)}$ est dérivable sur $]a_1, a_n[$. Montrer que :

$$\forall x \in [a_1, a_n],\ \exists c_x \in]a_1, a_n[,\ f(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

Indication : pour $x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, on pourra considérer la fonction $\varphi_x : [a_1, a_n] \to \mathbb{R}$ définie par

$\varphi_x(t) = f(t) - f(x) \prod_{i=1}^{n} \frac{t-a_i}{x-a_i}$.

Application : soit g une fonction de classe C^2 sur le segment $[a,b]$. Montrer que, pour tout réel $x \in [a,b]$, il existe un $c \in [a,b]$ tel que $g(x) = g(a) + \frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} g''(c)$.

Exercice 84 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^n sur $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe une constante M telle que $g(a) = g(b)$ où la fonction g est définie par
$$g : x \mapsto f(b) - \left(f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right) - M \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
2. Déterminer $g'(x)$, appliquer le théorème de Rolle et en déduire :
$$\text{il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$
3. Application : pour tout réel $x \neq 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, prouver
$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$. En déduire $e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 85 Montrer, à l'aide de la fonction, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$, que ni le théorème de Rolle, ni l'égalité des accroissements finis ne peuvent s'étendre aux fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes.

RECHERCHE

Exercice 86 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur en 0 et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$.
Indication : introduire $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 87 Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 88 Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (xy - 1 \neq 0) \Rightarrow f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy} \right).$$
Indication : dériver formellement par rapport à x, puis prendre $x =$?.

Exercice 89 Trouver toutes les fonctions f dérivables en 0 et vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ (pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).

Exercice 90 Soit un rationnel $q > 0$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, il existe un unique réel $y \geq 0$ tel que $ye^y = x^q$.
Ainsi, on peut définir la fonction f telle que $y = f(x)$, et $f(x)e^{f(x)} = x^q$

2. Etudier sur $\mathbb{R}^+$ la dérivabilité de la fonction f, et calculer $f'(x)$.
   (Introduire $g(t) = te^t$ et étudier g^{-1}).

Exercice 91 Résoudre l'équation « $5^x + 2^x = 4^x + 3^x$ », où l'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

Exercice 92 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = \dfrac{x}{2} + 3$.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\dfrac{x}{2} + 3) = \dfrac{f(x)}{2} + 3$. En déduire que f' est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer f.

Exercice 93 On rappelle que, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$, vérifiant : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ (polynômes de Tchebycheff). Montrer que T_n est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle : $(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2 y = 0$.

Exercice 94 *(Théorème de Darboux) : le but de cet exercice est de démontrer que la dérivée f' d'une fonction f, vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires, même si f' n'est pas continue!!!*
Enoncé : soit f, une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b, deux réels pris dans I avec $a < b$. Soit y_0 un réel pris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrer qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que $y_0 = f'(c)$.
Indications :

1. Soit φ et $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies par :
   $\varphi(a) = f'(a)$ et $\forall x \in]a, b],\ \varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
   $\psi(b) = f'(b)$ et $\forall x \in [a, b[,\ \psi(x) = \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x}$.
   Vérifier que φ et ψ sont continues sur $[a, b]$.
2. Justifier que y_0 est compris entre $f'(a)$ et $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, OU entre $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $f'(b)$ (faire un schéma!).
3. Appliquer correctement le TVI, puis conclure.

Application : une fonction en escalier *(non constante)* admet-elle des primitives? Exemple de la fonction partie entière E sur $\mathbb{R}$.

Exercice 95 On pose $f(x) = \left(x \sin(\frac{1}{x})\right)^2$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue, dérivable sur un voisinage de 0 et admet en 0 un minimum. La dérivée de f s'annule-t-elle en 0 en changeant de signe?

Exercice 96 Déterminer les polynômes P vérifiant : $P + P' = \dfrac{X^n}{n!}$.

Exercice 97 Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}, \text{ puis } \quad n\ln(1 + \frac{1}{n}) \leq 1 \leq (n+1)\ln(1 + \frac{1}{n}).$$

En déduire $(1 + \dfrac{1}{n})^n \leq e \leq (1 + \dfrac{1}{n})^{n+1}$ et une valeur approchée de e à 10^{-2}.

Exercice 98 Soit $P(x) = (1-x^2)^n$. Après avoir étudié les racines des polynômes $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, n$, montrer que le polynôme $P^{(n)}$ a toutes ses racines (réelles et simples) entre -1 et $+1$.

Exercice 99 Soit f, une fonction solution de l'équation différentielle (du premier ordre, **non** linéaire) : $y'^2 = y$. Montrer que, si $f(a) = f(b) = 0$ (pour $a < b$ donnés), alors $f = 0$ sur $[a, b]$).
Indication : utiliser, s'il existe, le maximum de f sur $[a, b]$.

CONVEXITÉ

Exercice 100 Montrer : $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 101 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 102 Que dire d'une fonction à la fois convexe et concave sur un intervalle ?

Exercice 103 Si f et g sont convexes sur I, $\mathrm{Sup}(f, g)$ et $\mathrm{Inf}(f, g)$ sont-elles convexes ? (Rép : oui-non)

Exercice 104 Que peut-on dire de la somme de deux fonctions convexes ? D'une combinaison linéaire de deux fonctions convexes ?

Exercice 105 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction convexe et positive. On suppose que f a deux zéros a et b avec $a < b$. Montrer que f est nulle sur le segment $[a, b]$.

Exercice 106 Montrer, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$: $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{1}{2}(e^a + e^b)$.

Exercice 107 Montrer que la fonction valeur absolue « $|.|$ » est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 108 Montrer : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 109 Montrer : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x \leq x \leq \tan x$. Qu'en déduit-on pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$?

Exercice 110 Montrer que, pour $0 \leq x \leq 1$, alors : $1 + x \leq e^x \leq 1 + x(e-1)$.

Exercice 111 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction convexe et $x < y < z$. Montrer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$.

Exercice 112 Soit f et g convexes sur $\mathbb{R}$, et g croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
Application : Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer : ($\ln \circ h$ convexe) $\Rightarrow$ (h convexe).

Exercice 113

1. Soit $f(x) = e^{2x-\cos(x)}$: montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : I \to]0, +\infty[$. Montrer l'implication : ($\ln f$ convexe) $\Rightarrow$ (f convexe) (utiliser la convexité de ln). Qu'en est-il de la réciproque ?
3. Application : prouver la convexité de g avec $g(x) = (1+x)^x$.

Exercice 114 On rappelle que, si f est convexe sur un intervalle I, alors la pente des cordes à extrémité a fixe est une fonction croissante sur $I - \{a\}$.

1. On pose $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$: montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}^*$.
2. On pose $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$: montrer que h est décroissante sur $]0, \pi]$.

Exercice 115 Soit f convexe, croissante et non constante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 116 Soit a, un réel et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, une fonction convexe et majorée. On pose $\varphi(t) := \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ pour tout $t \in]a, +\infty[$.

1. Montrer que $\varphi(t)$ admet une limite, finie et négative, lorsque $t \to +\infty$.
2. Montrer que f est décroissante sur $[a, +\infty[$.
3. En déduire que toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée est constante.

Exercice 117 Soit f convexe et majorée sur $\mathbb{R}$: montrer que f est constante.
Donner un exemple de fonction convexe et majorée sur $]0, +\infty[$ mais non constante.

Exercice 118 On dit qu'une partie $X \subset \mathbb{R}^2$ est convexe si : $\forall A, B \in X$, $[A, B] \subset X$.
Autrement dit : $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall (x, y) \in X$, $\forall (x', y') \in X$, $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y') \in X$.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle.
   On appelle *épigraphe de* f l'ensemble $\mathrm{Ep}(f) := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$.
   Montrer que : (f est convexe) <u>ssi</u> ($\mathrm{Ep}(f)$ est convexe)
2. En déduire la convexité de $\max(f, g)$ si f et g sont convexes.

Exercice 119 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ strictement positifs.

1. En utilisant la concavité de ln, montrer que $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.
   On vient d'établir : (la moyenne géométrique) $\leq$ (la moyenne arithmétique).
2. Deux applications directes :
   (a) Déduire (de la question 1) : $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}^+)^3$, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ et $(a+b+c)^3 \geq 27abc$.

(b) Déduire (de la question 1) : $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

3. A l'aide du premier résultat, montrer que : $(x_1x_2\dots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq \dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}$.
4. A l'aide du premier résultat, montrer que : $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dots+\dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

Exercice 120 Utiliser la fonction f, définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(\ln(x))$ pour montrer que : $\forall x,y \in]1,+\infty[$, $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$

Exercice 121 Soit f, définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)$.

1. Montrer que f est convexe sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire : $\forall (a,b,x,y) \in]0,+\infty[^4$, $x\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)+y\ln\left(\dfrac{y}{a}\right) \geq (x+y)\ln\left(\dfrac{x+y}{a+b}\right)$.

Exercice 122 Montrer : $\forall a_1,a_2,\dots,a_n \in \mathbb{R}$, $a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\dots+a_n)^2$.

Exercice 123 Montrer : $\forall t \in]0,1[$, $\forall x,y \in]0,+\infty[$: $x^ty^{1-t} \leq tx+(1-t)y$.

Exercice 124 Soit $p>0$ et $q>0$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. Montrer que : $\forall x>0$, $\forall y>0$, $xy \leq \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$ (indication : ln est ? ? ?).
2. Soit $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n y_i^q = 1$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i \leq 1$.
3. Soit $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ strictement positifs. Montrer l'*inégalité de Hölder* :
$$\sum_{i=1}^n x_iy_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
4. Soit $p>1$. En écrivant $(x_i+y_i)^p = x_i(x_i+y_i)^{p-1}+y_i(x_i+y_i)^{p-1}$, montrer *l'inégalité de Minkowski* :
$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$
5. Application : soit (a_n), une suite strictement positive. On pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2$ et $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$.

   Montrer que si (u_n) converge, alors (v_n) aussi.

Exercice 125

1. Etudier la convexité de la fonction f définie par $f(x)=\ln(1+e^x)$.

2. En déduire, pour $n \geq 1$ et $t_i > 0$ (avec $i = 1, \ldots, n$) : $1 + \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{i=1}^{n} (1 + t_i)^{\frac{1}{n}}$.

3. En déduire alors, si $a_i > 0$ et $b_i > 0$ (avec $i = 1, \ldots, n$) : $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 126 Soit $p \in]1, +\infty[$: pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^p$.

1. f est-elle convexe ou concave ?
2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs et $t_1, \ldots, t_n$ positifs de somme 1. Montrer :
$$\left(1 + \left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{i=1}^{n} \left(t_i^{\frac{1}{p}} + (t_i x_i)^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$
3. En déduire l'inégalité de *Minkowski* : pour $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ strictement positifs, on a
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 127 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, une fonction convexe.

1. Montrer que $[x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}]$ admet une limite L en $+\infty$ avec $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. Si $L \in \mathbb{R}$, montrer que : $\forall a, x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq a \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq L$, puis que $[x \mapsto f(x) - Lx]$ a une limite en $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Interprétation géométrique ?

Exercice 128 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, strictement décroissante, surjective et convexe. Montrer que f est bijective et que f^{-1} est également convexe.

Exercice 129 On pose $f(x) = x \tan(x)$: montrer que les points d'inflexion de f sont alignés et que les normales en ces points au graphe de f passent toutes par l'origine du repère. Allure de la courbe.

Exercice 130 Montrer que, si f est convexe et concave sur un intervalle I, alors f est affine.
Application : si f et g sont convexes et $\alpha f + \beta g$ concave avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, que peut-on dire de f et g ?

Exercice 131 Soit $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$, avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$: on pose $f(x) = -\ln |P(x)|$.
Montrer que f est convexe sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et en déduire que :
$$\forall x, y \in [x_i, x_{i+1}],\ \left[P\left(\frac{x + y}{2}\right)\right]^2 \geq |P(x)P(y)|.$$

Exercice 132 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est lipschitzienne sur tout segment contenu dans I.

Rappel : toute fonction T monotone sur $]\alpha,\beta[$ possède des limites en α^+ et β^-, et ces limites sont nécessairement finies si T est monotone sur le segment $[\alpha,\beta]$.

Exercice 133 Soit deux réels $x>0$ et $y>0$.
On pose $h=\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, $g=\sqrt{xy}$, $a=\dfrac{x+y}{2}$ et $q=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ *(moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique)*. Prouver qu'on a : $h\leq g\leq a\leq q$.

Exercice 134 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction de classe C^2. Montrer que f peut s'écrire comme la somme d'une fonction convexe et d'une fonction concave. Y-a-t'il unicité de cette décomposition ?
<u>Indication</u> : on rappelle que, pour toute fonction g, il existe deux fonctions positives, notées g^+ et g^-, telles que $g=g^+-g^-$ (où $g^+=\sup(g,0)=\dfrac{|g|+g}{2}$ et $g^-=\sup(-g,0)=\dfrac{|g|-g}{2}$).

Exercice 135 Soit f, une fonction de classe C^2 sur le segment $[a,b]$, telle que $f(a)=f(b)=0$.
On pose $M:=\sup\limits_{[a,b]}(f'')$.

1. Justifier l'existence de la constante M.
2. On définit la fonction g par $g(x)=f(x)-M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$: calculer g''.
En déduire la convexité/concavité de g sur $[a,b]$, puis que $g(x)\leq 0$ pour tout $x\in[a,b]$ (remarque : $g(a)=g(b)=...$).
3. On définit la fonction h par $h(x)=f(x)+M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$: calculer h''.
En déduire la convexité/concavité de h sur $[a,b]$, puis que $h(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a,b]$.
4. Déduire : $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)|\leq M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.

Exercice 136 On rappelle le résultat suivant (vu dans le cours sur limite/continuité de fonctions) : «si g est une fonction croissante sur un intervalle $]\alpha,\beta[$, alors g possède une limite à droite en α et une limite à gauche en β, limites finies ou infinies ».

Soit f, une fonction convexe sur un intervalle I, et $a\in\overset{o}{I}$, un point intérieur à I.

1. Que peut-on dire de la fonction $T_a : x\mapsto T_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$?
2. Soit deux réels x et y tels que $x<a<y$.
   (a) Justifier $T_a(x)\leq T_a(y)$.
   (b) y étant fixé, qu'obtient-on à la limite lorsque $x\to a^-$?
   (c) Ceci étant acquis, qu'obtient-on lorsque $y\to a^+$?
   (d) En déduire que f est dérivable à gauche et à droite en a (avec $f'_g(a)\leq f'_d(a)$).
   (e) Montrer alors le résultat suivant : « si une fonction f est convexe sur un intervalle I, alors f est continue en tout point a intérieur à I, autrement dit f est continue sur $\overset{o}{I}$ (*ouverture* de I) ». A l'aide d'un dessin, justifier qu'il est possible que f soit convexe sur I mais non continue aux extrémités de I.