Exercice 1 (Sous-espaces vectoriels engendrés par une famille.) *Pour chacun des ensembles donnés, les mettre sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteur (en particulier cela prouve qu'il s'agit bien de sous-espaces vectoriels)*

1. $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+3y=0\right\}$
2. $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+3y-2z=0\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
3. $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+3y-2z=0 \text{ et } x+y-z=0\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
4. $F=\left\{(\alpha+\beta,\alpha-2\beta,\alpha+3\beta)\in\mathbb{R}^3\ ,\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
5. $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+2y-z+t=0 \text{ et } x+y+2z-3t=0\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
6. $F=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_1=x_2\}$
7. $F=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^n x_k=0\}$
8. $F=\{(x,2x)\,,x\in\mathbb{R}\}$, *montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
9. $F=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
10. *F est l'ensemble des solutions de l'équation $y'+xy=0$, montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
11. *F est l'ensemble des solutions de l'équation $y''+y'+y=0$, montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
12. $F=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X]\,,\quad \int_0^1 P(t)\,dt=0\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
13. $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\,,\quad P(1)=P(2)=0\}$, *montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
14. $F=\left\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a\cos x+be^x\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*

Exercice 2

1. *On considère l'espace vectoriel (on ne demande pas de prouver qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel)* $F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\,,\ \int_0^1 P(t)\,dt=0\right\}$. *Pour* $k\in\{1,\cdots,n\}$, *on pose* $P_k(X)=X^k+\dfrac{2k}{k+1}X-1$. *Montrer que* $\mathrm{Vect}(P_1,\cdots,P_k)\subset F$.
2. *Dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *soit* $F=\mathrm{Vect}\left(\exp,\dfrac{1}{\exp}\right)$ *et* $G=\mathrm{Vect}(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$. *Montrer que* $F=G$.
3. *Dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on définit les fonctions* f_1,f_2,f_3 *et* f_4 *par* $f_1(x)=1,\ f_2(x)=\cos 2x,\ f_3(x)=\cos^2 x$ *et* $f_4(x)=\sin^2 x$. *Soit* $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ *et* $G=\mathrm{Vect}(f_3,f_4)$. *Montrer que* $F=G$.

Exercice 3

1. *Montrer que* $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-3z=0\right\}$ *et* $G=\mathrm{Vect}(1,2,-1)$ *sont en somme directe dans* $\mathbb{R}^3$.
2. *Pour quelles valeurs de a, les sous-espaces vectoriels* $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-y+2z=0\right\}$ *et* $G=\mathrm{Vect}(1,a,1)$ *sont-ils en somme directe ?*
3. *Montrer que dans* $\mathbb{R}_3[X]$, *les sous espaces* $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\,,\ P'(1)=0\}$ *et* $G=\mathrm{Vect}\left(1+X^2\right)$ *sont en somme directe.*
4. *Dans* $\mathbb{R}^n$, *montrer que* $F=\{(x_1,\cdots,x_n)\,,\ \sum_{k=1}^n kx_k=0\}$ *et* $G=\{(x_1,\cdots,x_n)\,,\ x_1=x_2=\cdots=x_n\}$ *sont en somme directe.*
5. *Dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *montrer que* $F=\{f \text{ constante sur } \mathbb{R}\}$ *et* $G=\{f \text{ nulle en } x=2\}$ *sont en somme directe.*
6. *Dans* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, *montrer que* $F=\left\{f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})\,,\ \int_0^\pi f(t)\,dt=0\right\}$ *et* $G=\{f \text{ telle qu'il existe } a\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=ax\}$ *sont en somme directe.*
7. *Soit* $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\,,\ P(1)=P(2)=0\}$ *et* $G=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\,,\ P(1)=P(-1)=0\}$ *sont-ils en somme directe dans* $\mathbb{R}_3[X]$ *?*

Exercice 4 *Montrer que les dans les exercices 3.1), 3.3), 3.5) et 3.6) les sous espaces sont supplémentaires. Pour l'exercice 3.6), donner la décomposition des fonctions* $\sin$, $\cos$ *et* $\exp$.