

1 Suites $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Preuve des résultats.

On considère une suite récurrente linéaire d'ordre définie par u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

où a et b sont, soit deux complexes, soit deux réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. La donnée de u_0 et de u_1 (conditions initiales) permet donc, de proche en proche, de calculer tous les termes de la suite. Il s'agit de déterminer une "formule" permettant de calculer directement u_n en fonction de n (et de u_0 et u_1).

Remarque : Si $a = b = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire égale à 0 pour $n \geq 2$.

1.1 Cas des suites complexes

Si a et b sont dans \mathbb{C} , on a le résultat suivant :

Theorem 1 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ où } (a, b) \in \mathbb{C}^2$$

On définit l'équation caractéristique $(E_c) : r^2 = ar + b$.

(1) Si (E_c) admet deux racines r_1 et r_2 distinctes, alors

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

(2) Si (E_c) admet une racine double r , alors

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu) r^n$$

Preuve. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - ru_n$$

(si la suite est géométrique de raison r , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mesure donc l'écart à la géométrie). On a alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - ru_{n+1} = au_{n+1} + bu_n - ru_{n+1} = (a-r)u_{n+1} + bu_n \\ &= (a-r)(u_{n+1} - ru_n) + (ar + b - r^2)u_n \end{aligned}$$

Ainsi, si r est racine de (E_c) , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $(a-r)$.

Si (E_c) admet deux racines r_1 et r_2 , on peut donc définir deux nouvelles suites géométriques en posant

$$v_n = u_{n+1} - r_1 u_n \text{ et } w_n = u_{n+1} - r_2 u_n$$

Puisque la somme des racines vaut $r_1 + r_2 = a$, on a $a - r_1 = r_2$ et $a - r_2 = r_1$. Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison r_2 , alors que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison r_1 . On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = r_2^n v_0 \text{ et } w_n = w_0 r_1^n$$

soit

$$\begin{cases} u_{n+1} - r_1 u_n = r_2^n v_0 \\ u_{n+1} - r_2 u_n = w_0 r_1^n \end{cases}$$

Si l'on voit cela comme un système d'inconnues u_n et u_{n+1} , le déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & -r_1 \\ 1 & -r_2 \end{vmatrix} = r_1 - r_2 \neq 0$ et on obtient

$$u_n = u_n = \frac{r_1^n w_0 - r_2^n v_0}{r_1 - r_2} = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Si maintenant (E_c) a une unique racine $r = \frac{a}{2}$, on ne peut construire qu'une seule suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - ru_n$, qui est géométrique de raison $a - r = r$. On a donc

$$v_n = u_{n+1} - ru_n = r^n v_0 \implies u_{n+1} = ru_n + r^n v_0$$

On regarde alors les premiers termes de la récurrence $u_{n+1} = ru_n + r^n v_0$, on obtient

$$u_1 = ru_0 + v_0, u_2 = ru_1 + rv_0 = r^2 u_0 + 2rv_0, u_3 = ru_2 + r^2 v_0 = r^3 u_0 + 3rv_0$$

On montre alors par récurrence que

$$u_n = r^n u_0 + nr^{n-1} v_0$$

La proposition $\mathcal{P}(n) = "u_n = r^n u_0 + nr^{n-1} v_0"$ est vraie pour $n = 0$, supposons la vraie au rang n , alors

$$u_{n+1} = ru_n + r^n v_0 = r(r^n u_0 + nr^{n-1} v_0) + r^n v_0 = r^{n+1} u_0 + (n+1)r^n v_0$$

Ainsi

$$u_n = r^n u_0 + nr^{n-1} v_0 = \left(u_0 + n \frac{v_0}{r}\right) r^n = (\lambda n + \mu) r^n \text{ car } r \neq 0, \text{ sinon } a = b = 0$$

■

Remarque : En pratique, on calcule les constantes λ et μ en écrivant que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$ lorsque (E_c) a deux racines, et que $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu)r$ lorsque (E_c) a une racine double.

1.2 Cas des suites réelles

On suppose que a et b sont réels et on cherche les suites réelles, on a alors le résultat suivant :

Theorem 2 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **réelle** vérifiant

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

On définit l'équation caractéristique $(E_c) : r^2 = ar + b$.

(1) Si (E_c) admet deux racines r_1 et r_2 distinctes, alors

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

(2) Si (E_c) admet une racine double r , alors

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu) r^n$$

(3) Si (E_c) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \bar{r}_1 = \rho e^{-i\theta}$, alors

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

Preuve. Dans le cas (1) et (2), on peut voir la suite comme une suite complexe. Les constantes λ et μ qui interviennent dans la conclusion se calculent en fonction de u_0 et de u_1 , donc sont réelles. Il reste le cas (3). On peut toujours voir la suite comme complexe. Il existe donc α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

où α et β sont complexes. On calcule alors α et β en fonction de u_0 et u_1 , on a

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha r_1 + \beta \bar{r}_1 = u_1 \end{cases}$$

Les formules de Cramer donnent alors

$$\alpha = \frac{1}{r_1 - \bar{r}_1} (u_1 - \bar{r}_1 u_0) \text{ et } \beta = -\frac{1}{r_1 - \bar{r}_1} (u_1 - r_1 u_0)$$

Puisque u_0 et u_1 sont réels (la suite est réelle), on a $\alpha = \bar{\beta}$. Ainsi $u_n = \alpha r_1^n + \bar{\beta} \bar{r}_1^n = 2 \operatorname{Re}(\alpha r_1^n)$. Si on pose $\alpha = \frac{\lambda - i\mu}{2}$ (i.e $\lambda = 2 \operatorname{Re}(\alpha)$ et $\mu = -2 \operatorname{Im}(\alpha)$), alors

$$\alpha r_1^n = \frac{\lambda - i\mu}{2} \times \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = \frac{\rho^n}{2} (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

■

Remarque : Une fois de plus les coefficients λ et μ s'obtiennent en écrivant que pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient u_0 et u_1 .