1 Les basiques

Exercice 1 *Calculer* $I = \int_0^1 xe^x dx$, $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ *et* $\int_0^1 2x\ln(1+x)\,dx$.

Exercice 2 *Soit* $u_n = \int_1^e \ln^n x dx$ *établir une relation de récurrence vérifiée par la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 3 *Soit* $u_n = \int_0^\pi x^n \cos x dx$ *établir une relation de récurrence vérifiée par la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 *On définit*

$$I = \int_0^\pi \cos^4 x dx \text{ et } J = \int_0^\pi \sin^4 x dx$$

1. *Justifier que* I *peut s'écrire*
$$I = \int_0^\pi \cos x\left(\cos x - \cos x \sin^2 x\right) dx$$
2. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer la relation*
$$I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$$
Montrer de même que
$$J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$$
3. *Donner les valeurs de* $I+J$ *et de* $J-I$. *En déduire celles de* I *et de* J.

Exercice 5 *Calculer* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx$ *en posant* $t = \cos x$.

Exercice 6 *Peut-on calculer* $I = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ *en posant* $t = \sqrt{x}$, *en posant* $x = t^2$ *?*

Exercice 7 *Calculer* $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^n x}$ *en posant* $t = \ln(x)$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 *Calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$ *en posant* $u = \cos x$.

Exercice 9 *Calculer* $\int_0^1 \frac{e^x dx}{2+e^x}$ *en posant* $t = e^x$.

Exercice 10 *Calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2t}{1+\cos t} dt$ *en posant* $u = \cos t$.

Exercice 11 *Calculer* $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ *en posant* $x = \sin t$, *retrouver ce résultat par une interprétation géométrique en termes d'aires.*

Exercice 12 *Calculer* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ *et* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ *(utiliser* $u = \frac{\pi}{2} - x$*).*

Exercice 13 *Calculer* $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx$ *en posant* $x = \tan u$.

Exercice 14 *Calculer* $\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x+\sin x} dx$ *en posant* $t = x + \sin x$.

Exercice 15 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^3(x)dx$ *en posant* $t = \sin x$.

Exercice 16 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$ *en posant* $u = \cos x$.

Exercice 17 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{dx}{\cos(x)(\sin x - \cos x)}$ *en posant* $t = \tan x$.

Exercice 18 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ *en posant* $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exercice 19 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)(1+\cos x+\sin x)}dx$ *en posant* $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exercice 20 *Soient* $a > 0$ *et* $b > 0$, *calculer* $\displaystyle I = \int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{b}{x}}}{x}dx$ *en posant* $ux = ab$.

Exercice 21 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$ *en posant* $u = \frac{\pi}{4} - x$. *En déduire* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$

2 Les Techniques

Exercice 22 *Caculer* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln^2(1+t^2)}{1+t^2}dt$. *En déduire* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln^2(\cos u)\tan u du$. *Généralisation ?*

Exercice 23 *Calculer* $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{8}} \frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x}dx$ *en posant* $u = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, *quel est le signe du résultat obtenu ?*

Exercice 24 *Calculer* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)\sqrt{2\sin 2x}}$ *en posant* $u = \tan x$.

Exercice 25 *Soit* $a > 0$, *on pose* $\displaystyle I(a) = \int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$, *en posant* $x = a\cos t$, *et en posant* $x = a\sin t$ *calculer* $I(a)$.

Exercice 26 *Soit* $a > 0$, *calculer* $\displaystyle\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ *à l'aide d'un changement de variable qui laisse globalement les bornes inchangées (globalement !).*

Exercice 27 *Soit* $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ *et* F *définie par* $\displaystyle F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$, *à l'aide du changement de variable* $u = \dfrac{1}{t}$, *établir, pour* $x \neq 0$, *une relation entre* $F(x)$ *et* $F\left(\dfrac{1}{2x}\right)$.