Définition : soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que :

1. $\mathcal{R}$ est **réflexive** si : $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$.
2. $\mathcal{R}$ est **symétrique** si : $\forall x, y \in E, \quad (x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)$.
3. $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si : $\forall x, y \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow (x = y)$.
4. $\mathcal{R}$ est **transitive** si : $\forall x, y, z \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.

Un relation d'ordre est une relation binaire qui est **réflexive** ,**antisymétrique** et **transitive**

Exercice 1 *Pour chacun des exemples suivant, indiquer quelles propriétés parmi les quatre sont vérifiées. En particulier, préciser s'il s'agit d'une relation d'ordre.*

1. $\mathbb{R}$ *et l'égalité des réels.*
2. $\mathbb{R}$ *avec* $x\mathcal{R}y$ *si et seulement si le point* M *de coordonnées* (x, y) *est sur le cercle unité.*
3. $\mathbb{R}$ *avec* $x\mathcal{R}y$ *si et seulement si le point* M *de coordonnées* (x, y) *est dans le disque unité fermé (i.e sur le cercle unité ou à l'intérieur).*
4. $\mathbb{N}$ *avec* $p\mathcal{R}q$ *si et seulement si* p *divise* q.
5. $\mathbb{C}$ *avec* $a\mathcal{R}b$ *si et seulement si* a *et* b *ont même module.*
6. $\mathcal{P}(E)$ *avec* $\subset$
7. *L'ensemble des droites du plan avec* $\mathcal{D}\mathcal{R}\mathcal{D}'$ *si et seulement si* D *et* D' *sont parallèles.*
8. $\mathbb{R}$ *avec* $x\mathcal{R}y$ *si et seulement si* $E(x) \leq E(y)$
9. $\mathbb{R}$ *avec* $x\mathcal{R}y$ *si et seulement si* $\sin x \leq \sin y$
10. $\mathbb{N}$ *avec* $a\mathcal{R}b$ *si et seulement si* $a^b \leq b^a$
11. $\mathbb{R}$ *avec* $x\mathcal{R}y$ *si et seulement si* $x - y > 0$
12. *Soit* $\mathcal{P}^*$ *l'ensemble des nombres premiers différents de* 2, $\mathcal{P}^* = \{3, 5, 7 \cdots\}$, *sur* $\mathcal{P}^*$, *on définit* $p\mathcal{R}q$ *si et seulement si* $\dfrac{p+q}{2} \in \mathcal{P}^*$.
13. $\mathbb{N}^*$ *avec* $a\mathcal{R}b$ *si et seulement si* $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ b = a^n$

Exercice 2 *On munit* $\mathbb{N}^*$ *de la relation* $\mathcal{R}$ *définit par* $a\mathcal{R}b$ *si et seulement si* $\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = b$.

1. *Montrer que l'on a définit une relation d'ordre.*
2. *Est-ce un ordre total ?*
3. *La partie* $\{2, 3\}$ *est-elle majorée ?*

Exercice 3 *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux cercles du plan de centre respectif* O *et* O' *et de rayon respectif* R *et* R'. *On définit la relation* $\mathcal{R}$ *sur les cercles par* $\mathcal{C}\ \mathcal{R}\ \mathcal{C}'$ *si et seulement si*

$$OO' \leq R - R'$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur les cercles du plan.

Exercice 4 *Soient* E *et* F *deux ensembles et* $f : E \longrightarrow F$. *Soit* $\mathcal{S}$ *une relation d'ordre sur* F, *on définit la relation* $\mathcal{R}$ *sur* E *par*

$$x\mathcal{R}y \iff f(x)\ \mathcal{S}\ f(y)$$

Montrer que si f *est injective, alors* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre sur* E.