

1 Les basiques

Exercice 1

1. Si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ vérifier que $\sup(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$. En déduire la continuité de $\sup(f, g)$ et de $\inf(f, g)$ si f et g le sont sur I .
2. On pose $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0) = -\inf(f, 0)$. Exprimer f^+ et f^- à l'aide de f et de $|f|$. Montrer que ces fonctions sont continues si f l'est. Justifier que $f = f^+ - f^-$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on suppose que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 3 Soit $f(x) = \sin(\pi x) \sin(\pi(x-1))$. Montrer que le graphe représentatif de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ayant deux centres de symétries distincts. Montrer que f est la somme d'une fonction périodique et d'une fonction linéaire (la décomposition est-elle unique ?).

Exercice 5 Soient f et g deux fonctions bornées sur I , montrer que $f+g$ est bornée et que $\sup_I(f+g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$.

Exercice 6 Trouver toutes les applications f définies sur \mathbb{R} et à valeurs réelles telles que

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) f(x^2 - 1) = \sin(x)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, xf(x) + f(1-x) = x^3 + 1$.

Exercice 7 La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)$ admet-elle une limite en $x = 0$?

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes

$$\begin{array}{cccc} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin x & \lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x E\left(\frac{1}{x}\right) & \lim_{x \rightarrow -\infty} x E\left(\frac{1}{x}\right) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) & \text{si } a \neq 0 \end{array}$$

Exercice 9 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_a(x) = (x^2 - ax + 1) \tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)$

1. Donner un équivalent de f_a en $x = 3$.
2. Pour quelle valeur de a la fonction est-elle prolongeable par continuité en $x = 3$? Quelle est alors la valeur de $f_a(3)$?
3. Plus généralement, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme à coefficients réels, à quelle condition sur P la fonction $f(x) = P(x) \tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ est-elle prolongeable en $x = 3$? Exprimer alors $f(3)$ en fonction de $P'(3)$.

Exercice 10 Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^{E(x)}}{E(x)^x}$.

1. Montrer que f est continue à droite en tout point de I . Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, quelle est la limite à gauche de f en p ? La fonction f est-elle continue à gauche en tout point de I ?
2. Calculer les limites des suites $(f(u_n))_n$ lorsque ^(a) $u_n = n$, ^(b) $u_n = n + \frac{1}{2}$, ^(c) $u_n = n + \frac{1}{\ln n}$.
3. Soit $a \in [0, 1]$, montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

Exercice 11 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue, montrer que $\exists x_0 \in [0, 1], f(x_0) = x_0$.

Exercice 12 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on suppose f positive et $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $\forall a \in [0, 1], \exists x_a \in [0, 1 - a], f(x_a + a) = f(x_a)$ (traduire géométriquement ce résultat).

Exercice 13 Etudier, après avoir précisé le domaine de définition, la continuité de

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x + \sqrt{x - E(x)} & x &\longmapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)} \\ x &\longmapsto E(x) + (x - E(x))^2 & x &\longmapsto E(x)^2 + (2E(x) + 1)(x - E(x)) \end{aligned}$$

Exercice 14 Montrer que les fonctions cos et sin sont lipschitziennes sur \mathbb{R} .

Exercice 15 Montrer que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ mais pas sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 16 À propos des fonctions lipschitziennes

1. Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur un intervalle I est un espace vectoriel.
2. Montrer qu'une composée de deux fonctions lipschitziennes est encore une fonction lipschitzienne. Autrement dit : soit I et J , deux intervalles de \mathbb{R} , f lipschitzienne sur I et g lipschitzienne sur J . On suppose $f(I) \subset J$: $g \circ f$ est donc définie. Montrer que l'application $g \circ f$ est lipschitzienne.
3. Montrer que, si f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ (avec $a < b < c$), alors f est k -lipschitzienne sur $[a, c]$.
4. Montrer que, si f est lipschitzienne sur un intervalle I , alors $|f|$ l'est aussi. Réciproque ? Indication : $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{x}{|x|} \dots$
5.
 - (a) Montrer que, si f est lipschitzienne sur un intervalle I borné, alors f est bornée sur I .
 - (b) En déduire que, si f et g sont lipschitziennes sur un intervalle I borné, alors $f \times g$ est une fonction lipschitzienne sur I .
 - (c) Montrer que ce résultat devient faux en général si I n'est pas un intervalle borné.
6. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que : $\forall x \in I, |f(x)| \geq c > 0$, et que f est k -lipschitzienne. Que dire de $\frac{1}{f}$?
7. On suppose que f et g sont respectivement k et k' -lipschitziennes sur I . Que dire de $f + g$? $f \times g$? λf avec $\lambda \in \mathbb{R}$? $\sup(f, g)$? $\inf(f, g)$?
8. On suppose que f est lipschitzienne et dérivable sur un intervalle I . Montrer que sa dérivée f' est bornée sur I . Application : \exp est-elle lipschitzienne sur \mathbb{R}^+ ? \arcsin est-elle lipschitzienne sur $] -1, +1[$?

2 Les techniques

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right)$, que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? En déduire f .

Exercice 18 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vérifiant

$$\forall x \in [0, 1], 2x - f(x) \in [0, 1] \text{ et } f(2x - f(x)) = x$$

1. On pose $g(x) = 2x - f(x)$, montrer que $g \circ g(x) = 2g(x) - x$.
2. En déduire que pour $n \geq 1, g^{(n)}(x) - x = g \circ \dots \circ g(x) - x = n(g(x) - x)$ puis que $|g(x) - x| \leq \frac{2}{n}$.
3. En déduire f .

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$.

1. Quelle est la parité de f ?

2. Soit $x > 0$, montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x^{2^n})$.
3. En déduire que f est constante sur \mathbb{R} .

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R} telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

1. Calculer $f(0)$, quelle est la parité de f ?
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = n^2 f(x)$.
3. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = r^2 f(1)$.
4. En déduire f .

Exercice 21 Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 22 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et n un entier non nul, on suppose que $f(0) = f(1)$. On pose $\forall k \in \langle 0, \dots, n-1 \rangle$, $\delta_k = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k$, que peut-on dire du signe des δ_k ?
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists a \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $f\left(a + \frac{1}{n}\right) = f(a)$.
3. Donner un exemple de fonction où $\forall x \in \left[0, 1 - \frac{2}{3}\right]$, $f\left(x + \frac{2}{3}\right) \neq f(x)$.
4. Application : Un marcheur fait 12 km en 1 heure, montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il fait 6 km (de même, il existe un intervalle d'un quart d'heure pendant lequel il fait 3 km, mais pas nécessairement un intervalle de trois quart d'heure pendant lequel il fait 9 km !).

3 Les olympiques

Exercice 23 (Olympiades de Malaisie) La fonction f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+3)f(x-3)$$

Montrer que f est périodique

Exercice 24 Soient a et b deux réels strictement positifs, on se propose de déterminer toutes les fonctions f continues sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) - (a+b)f(x+1) + abf(x) = 0$$

1. Cas où $a \neq b$.

(a) Montrer que si α et β sont deux fonctions continues et 1-périodiques alors

$$f(x) = \alpha(x)a^x + \beta(x)b^x$$

est solution du problème.

(b) Soit f une solution du problème, on suppose qu'il existe deux fonctions α et β 1-périodiques telles que $f(x) = \alpha(x)a^x + \beta(x)b^x$. En évaluant $f(x)$ et $f(x+1)$ déterminer $\alpha(x)$ et $\beta(x)$.

(c) Montrer que les fonctions α et β trouvées sont bien continues et 1-périodiques.

2. En vous inspirant du cas 1.), traiter le cas où $a = b$.