

1 Les basiques

Exercice 1 On se place dans le plan \mathbb{R}^2 muni du repère canonique $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $O' = (1, 2)$, $\vec{e}_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, montrer que $\mathcal{R}' = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé direct. Donner les coordonnées du point $M = (1, 1)$ dans \mathcal{R}' . Donner, dans \mathcal{R}' , l'équation de la droite D d'équation $x + 2y = 1$ dans \mathcal{R} .

Exercice 2 On se place dans le plan orienté \mathbb{R}^2 canonique. Soit $\vec{u} = (5, 12)$. Donner une BOND (base orthonormée directe) (\vec{e}_1, \vec{e}_2) tel que le vecteur \vec{e}_1 doit colinéaire à \vec{u} .

Exercice 3 On se place dans le plan \mathbb{R}^2 muni du repère canonique $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble \mathcal{H} des points $M = (x, y)$ tels que

$$x^2 - y^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}xy = 4$$

Soit \mathcal{R}_θ le repère obtenu par rotation de centre O et d'angle θ du repère \mathcal{R} . Donner l'équation de \mathcal{H} dans \mathcal{R}_θ . Tracer l'ensemble \mathcal{H} .

Exercice 4 Soient O, A, B trois points non alignés du plan usuel. Soient O', A', B' les milieux respectifs des segments $[A, B], [O, B], [O, A]$.

1. Montrer que $\mathcal{R} = (O, \vec{OA}, \vec{OB})$ et $\mathcal{R}' = (O', \vec{O'A'}, \vec{O'B'})$ sont des repères cartésiens du plan.
2. Existe-t'il des points ayant mêmes coordonnées dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' ?

Exercice 5 Reconnaître et tracer les graphes des courbes d'équation polaires

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} & \rho &= -\cos \theta \\ \rho &= \frac{5}{\sin \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)} & \rho &= \frac{5}{4 \cos \theta + 3 \sin \theta} \\ \rho &= \sin \theta & \rho &= 2 \cos \theta - 3 \sin \theta \\ \rho &= \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) & \rho &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sin 2\theta} + \sqrt{1 - \sin 2\theta}} \end{aligned}$$

Exercice 6 Soit trois droites (AB) , (AC) et (BC) du plan d'équations respectives $(AB) : x + 2y = 3$, $(AC) : x + y = 2$ et $(BC) : 2x + 3y = 4$. Déterminer les équations des médianes du triangle (A, B, C) et vérifier qu'elles sont concourantes.

Exercice 7 On se place dans le plan \mathbb{R}^2 canonique. Soit $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$ et $C = (2, 3)$. Déterminer l'isobarycentre, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit de (ABC) . Vérifier que ces trois points sont alignés.

Exercice 8 Dans \mathbb{R}^2 on considère $\mathcal{D} : x + 2y = 5$ et $\mathcal{D}' = 3x - 4y = 7$ dans le repère canonique, montrer que \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes en un point noté A dont on déterminera les coordonnées. Soit $B : (4, 1)$, montrer que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la droite $\mathcal{D}_{\alpha, \beta} : \alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 4y - 7) = 0$ passe par A . En déduire l'équation de (AB) .

Exercice 9 Dans \mathbb{R}^2 canonique, soit $B = (-3, -1)$, h la droite d'équation $x - y + 1$, m la droite d'équation $2x - 3y + 4$. Déterminer A et C pour que h et m soient respectivement la hauteur et la médiane au triangle (ABC) issues de A .

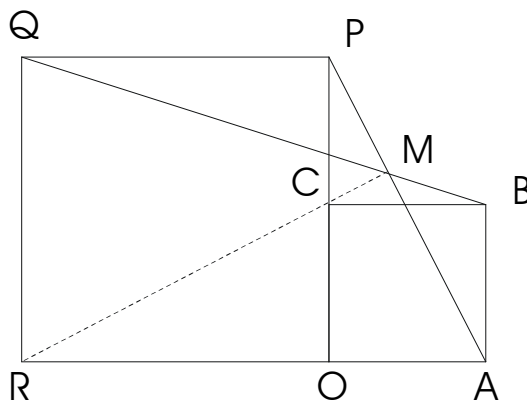
Exercice 10 Dans \mathbb{R}^2 canonique, soient A, B et C trois points sur l'hyperbole équilatère \mathcal{H} d'équation $y = \frac{1}{x}$, montrer que l'orthocentre du triangle (ABC) est encore sur \mathcal{H} .

Exercice 11 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, soit \mathcal{D} d'équation $x + 2y - 3 = 0$.

1. Déterminer \mathcal{D}' parallèle à \mathcal{D} et passant par $A : (1, -1)$
2. Déterminer \mathcal{D}'' orthogonale à \mathcal{D} et passant par $B : (2, 1)$
3. Pour quelle valeur de m la droite Δ d'équation $mx + (1 - m)y + 4 = 0$ est elle parallèle à \mathcal{D} , perpendiculaire à \mathcal{D} ?

4. Pour quelle valeur de λ la droite Δ' passant par A de vecteur directeur $\vec{u} : (2m, m + 1)$ est elle parallèle à \mathcal{D} , perpendiculaire à \mathcal{D} ?

Exercice 12 On considère la figure formée de deux carrés $OABC$ et $OPQR$. On construit le point M comme intersection de (AP) et de (BQ) . Montrer que les points M, C et R sont alignés.



Exercice 13 Dans \mathbb{R}^2 , soit $A = (1, 1)$ et $\mathcal{D} : x + 2y - 3 = 0$, trouver Δ tel que $A \in \Delta$ et $(\Delta, \mathcal{D}) = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 14 Soit \mathcal{C} le cercle de centre $\Omega : (2, -1)$ de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et \mathcal{D} la droite d'équation $2x + y + 1 = 0$. Déterminer les tangentes à \mathcal{C} parallèles à \mathcal{D} .

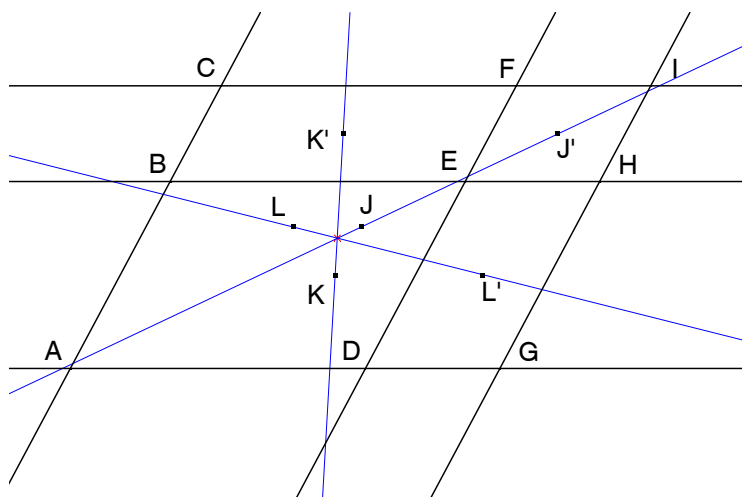
Exercice 15 Déterminer les droites contenant A et tangentes à (\mathcal{C}) lorsque:

1. $A : (2, 3)$ et $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$
2. $A : (0, 0)$ et $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

Exercice 16 Déterminer l'équation du cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(5, 1)$ et tangent à $\mathcal{D} : 3x + 3y - 7 = 0$

2 Les Techniques

Exercice 17 Trois droites parallèles du plan \mathbb{R}^2 sont coupées par trois droites parallèles selon le schéma suivant



On désigne par : L et L' les centres des parallélogrammes (A, C, F, D) et (D, E, H, G) , J et J' les centres des parallélogrammes (A, C, I, G) et (E, F, I, H) , K et K' les centres des parallélogrammes (A, B, H, G) et (B, C, F, E)
 Montrer que les droites (LL') , (JJ') et (KK') sont concourantes. (utiliser $\mathcal{R} = (A, AD, AB)$).

Exercice 18 Dans le plan \mathbb{R}^2 , soit (A, B, C) un triangle, (P, Q, R) trois points tels que $P \in (BC)$, $Q \in (AC)$ et $R \in (AB)$. On suppose P, Q et R distincts des sommets. Montrer que :

Théorème de Menelaüs: (P, Q, R) alignés $\iff \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$

Théorème de Ceva: $(AP), (BQ), (CR)$ concourantes ou parallèles $\iff \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$

Exercice 19 Dans le plan \mathbb{R}^2 , soit (A, B, C) un triangle, Δ_A, Δ_B et Δ_C trois droites parallèles passant respectivement par A, B et C . On note $A' = (BC) \cap \Delta_A$, $B' = (AC) \cap \Delta_B$ et $C' = (AB) \cap \Delta_C$. Soit $P = (BC) \cap (B'C')$, $Q = (AC) \cap (A'C')$ et $R = (AB) \cap (A'B')$ montrer que, en général, P, Q et R sont alignés. Que dire si $(AC) \parallel (A'C')$?

Exercice 20 Une droite \mathcal{D} coupe un triangle (A, B, C) . On note $P = (BC) \cap \mathcal{D}$, $Q = (AC) \cap \mathcal{D}$ et $R = (AB) \cap \mathcal{D}$. Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$, montrer que I, J et K sont alignés.

Exercice 21 Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , soient les deux cercles $\Gamma : x^2 + y^2 = 10$ et $\Gamma' : x^2 + y^2 - 10x + \frac{45}{2} = 0$.

1. Préciser les centres et les rayons de Γ et Γ' .
2. Déterminer les équations des quatre tangentes communes à Γ et Γ' . Montrer que ces tangentes se regroupent par paires qui se coupent sur la droite joignant les centres. Montrer que les points d'intersection sont les centres d'homothéties qui échangent Γ et Γ' .
3. Déterminer les huit points de contact entre l'un des cercle et l'une des tangentes. Montrer que ces points se répartissent en deux ensembles de quatre points alignés.

Exercice 22 A tout nombre réel m , on associe l'ensemble \mathcal{C}_m des points M du plan dont les coordonnées vérifient

$$x^2 + y^2 - 4mx - 2my + 10(m-1) = 0$$

1. Démontrer que, quelque soit m , \mathcal{C}_m est un cercle.
2. Déterminer l'ensemble des centres Ω_m des cercles \mathcal{C}_m .
3. Démontrer qu'il existe deux points A et B dont on déterminera les coordonnées communs à tous les cercles \mathcal{C}_m .
4. Démontrer, que pour tout point $M_0 : (x_0, y_0)$ n'appartenant pas à la droite (AB) , il existe un cercle \mathcal{C}_m et un seul contenant M_0 .