

1 Les basiques

Exercice 1 Que dire d'une fonction convexe et concave sur un intervalle ?

Exercice 2 Que dire de la somme de deux fonctions convexes ? D'une combinaison linéaire ?

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe et positive. On suppose que f a deux zéros a et b avec $a < b$. Montrer que f est nulle sur le segment $[a, b]$.

Exercice 4 Soient f et g convexes sur I , que dire de $\sup(f, g)$ et de $\inf(f, g)$?

Exercice 5 Montrer que pour $x \in [0, 1]$, on a $1 + x \leq e^x \leq 1 + x(e - 1)$.

Exercice 6 Justifier, à l'aide de la convexité d'une certaine fonction que $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est croissante sur \mathbb{R}^* .

Exercice 7 Soient f et g convexes sur \mathbb{R} avec g croissante, montrer que $g \circ f$ est convexe. En déduire que si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est telle que $\ln h$ est convexe, alors h est convexe.

Exercice 8 Soit f convexe sur I et $x < y < z$ dans I , montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$.

Exercice 9 Utiliser la fonction f , définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \ln \ln x$ pour montrer que :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \sqrt{\ln(x) \ln(y)}$$

Exercice 10 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $A(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ (moyenne arithmétique) et $G(a_1, \dots, a_n) =$

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \text{ (moyenne géométrique). Montrer que } A(a_1, \dots, a_n) \geq G(a_1, \dots, a_n).$$

Applications : Démontrer les inégalités

1. Montrer que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^{+3}$,

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &\geq 3abc \\ (a + b + c)^3 &\geq 27abc \end{aligned}$$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

3. Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$ un polynôme de degré $n \geq 2$ ayant n racines réelles strictement négatives. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(k) \geq (k+1)^n$$

Exercice 11 Prouver la convexité de $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Montrer que pour tout n dans \mathbb{N}^* , $\forall (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^n (1 + x_k)^{\frac{1}{n}}$$

En déduire que pour tout n dans \mathbb{N}^* , $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$

$$\left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 12 Montrer que pour tout n dans \mathbb{N}^* , $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k}$$

En déduire que $\forall x > 1$,

$$\sqrt{x^{2n} - 1} \geq \sqrt{\frac{x+1}{x-1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{n}}}$$

Exercice 13

1. Soit f définie par $f(x) = e^{2x - \cos x}$, montrer que f est convexe sur \mathbb{R} .
2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\ln f$ convexe $\implies f$ convexe (Utilisez la convexité de \ln). Que pensez-vous de la réciproque ?
Application : prouver la convexité de g définie par $g(x) = (1+x)^x$.

Exercice 14 Montrer que $\forall a, b, x, y > 0$, on a

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}$$

2 Les techniques

Exercice 15 Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque x tend vers $+\infty$. (On pourra utiliser la croissance des cordes).

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ positive, bornée, de classe \mathcal{C}^2 telle que $f \leq f''$.

1. Montrer que f est convexe et décroissante.
2. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.
3. Soit g et h définies par $g(x) = f(x)e^x$ et $h(x) = (f'(x) + f(x))e^{-x}$ pour $x \geq 0$. Etudier les variations de h et de g , ainsi que le signe de h .
4. En déduire que pour $x \geq 0$, on a $f(x) \leq f(0)e^{-x}$.