1 Les basiques

Exercice 1 *Dans $\mathbb{R}^2$, les familles suivantes sont-elles liées ou libres ?*

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right) & \overrightarrow{a}=(1,2)\,, & \overrightarrow{b}=(2,3) & \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right) & \overrightarrow{a}=(2m,3-m)\,, & \overrightarrow{b}=(6+m,4m-6) & \text{où } m\in\mathbb{R} \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) & \overrightarrow{a}=(1,-2)\,, & \overrightarrow{b}=(3,6)\,, & \overrightarrow{c}=(8,-4) \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right) & \overrightarrow{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha) & \overrightarrow{b}=(\cos 2\alpha,\sin 2\alpha) &
\end{array}$$

Exercice 2 *Dans $\mathbb{R}^3$, les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Dans le dernier cas, donner une relation de dépendance.*

$$\begin{array}{lllll}
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) & \overrightarrow{a}=(1,2,1)\,, & \overrightarrow{b}=(1,-1,3)\,, & \overrightarrow{c}=(0,3,-1) & \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) & \overrightarrow{a}=(1,-1,1)\,, & \overrightarrow{b}=(1,0,1)\,, & \overrightarrow{c}=(0,1,0) & \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) & \overrightarrow{a}=(0,1,0)\,, & \overrightarrow{b}=(1,2,1)\,, & \overrightarrow{c}=(0,3,0) & \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}\right) & \overrightarrow{a}=(1,3,2)\,, & \overrightarrow{b}=(3,-2,1) & \overrightarrow{c}=(0,0,0)\,, & \overrightarrow{d}=(-2,1,-1) \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}\right) & \overrightarrow{a}=(1,1,1), & \overrightarrow{b}=(1,4,1), & \overrightarrow{c}=(1,5,6), & \overrightarrow{d}=(0,1,1) \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) & \overrightarrow{a}=(m,1,1)\,, & \overrightarrow{b}=(1,m,1)\,, & \overrightarrow{c}=(1,1,m) & \text{où } m\in\mathbb{R}
\end{array}$$

Exercice 3 *Les familles suivantes sont-elles libres ou liées dans $\mathbb{R}^4$?*

$$\begin{array}{lllll}
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right) & \overrightarrow{a}=(1,2,-1,2)\,, & \overrightarrow{b}=(1,3,2,-6) & & \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}\right) & \overrightarrow{a}=(1,0,0,1)\,, & \overrightarrow{b}=(0,1,1,0)\,, & \overrightarrow{c}=(1,0,1,0)\,, & \overrightarrow{d}=(1,-1,1,-1) \\
\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}\right) & \overrightarrow{a}=(1,1,-1,m)\,, & \overrightarrow{b}=(m,1,1,3)\,, & \overrightarrow{c}=(0,1,0,1)\,, & \overrightarrow{d}=(1,-1,1,m)
\end{array}$$

Exercice 4 *Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E. On définit $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{k}-\overrightarrow{i}$. Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)$ est liée.*

Exercice 5 *Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1=(-3,-2,-1,3)$, $v_2=(1,0,2,4)$, $v_3=(1,-3,\lambda,\mu)$ où (λ,μ) sont des réels. Trouver λ et μ pour que ces trois vecteurs soient liés.*

Exercice 6 *On se place dans $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les familles suivantes sont-elles libres ?*

$$\begin{array}{llll}
(f,g,h) \text{ avec pour } x\in\mathbb{R} & f(x)=\sin x, & g(x)=\cos x, & h(x)=1 \\
(f,g,h) \text{ avec pour } x\in\mathbb{R} & f(x)=\sin^2 x, & g(x)=\cos^2 x, & h(x)=1 \\
(f,g,h) \text{ avec pour } x\in\mathbb{R} & f(x)=\cos x, & g(x)=\cos 2x, & h(x)=1 \\
(f,g,h) \text{ avec pour } x\in\mathbb{R} & f(x)=\cos^2 x, & g(x)=\cos 2x, & h(x)=1 \\
(f,g,h) \text{ avec pour } x\in\mathbb{R} & f(x)=\sin x, & g(x)=\sin(x+1)\,, & h(x)=\sin(x+2) \\
(f,g,h) \text{ avec pour } x\in\mathbb{R} & f(x)=\sin x, & g(x)=\sin\left(x^2\right), & h(x)=\sin\left(x^3\right)
\end{array}$$

Exercice 7 *Montrer que les applications $f:x\longmapsto|x|$, $g:x\longmapsto|x-1|$ et $h:x\longmapsto|x+1|$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

Exercice 8 *La famille $\left(X^{2k}\right)_{0\leq k\leq n}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_{2n}[X]$?*

Exercice 9 *Dans $E=\mathbb{R}^3$, soit $F=\{(x,y,z)\,,\,2x-y+z=0\}$, justifier que F est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base. Pour quelle valeur de m, le vecteur $\overrightarrow{a}=(1,m,1)$ est-il dans F ? Donner alors ses coordonnées dans la base que vous avez choisi.*

Exercice 10 *Soit $\mathcal{B}=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ une base de $\mathbb{R}^3$, justifier que $\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\overrightarrow{k}+\overrightarrow{i}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 11 *Soit $\mathcal{B}=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ une base de $\mathbb{R}^3$, la famille $\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}\right)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?*

Exercice 12 *Soit* $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$ *et* $\overrightarrow{v} = (-1, 2, 1)$, *compléter la famille* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *en une base de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 *Les vecteurs* $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, -1, 0)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2, 1, 3)$ *forment-ils une base de* $\mathbb{R}^3$ *? Si oui donner les coordonnées de* $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ *dans cette base en fonction de* x, y *et* z.

Exercice 14 *Montrer que, dans* $\mathbb{R}^3$, $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ *où* $\overrightarrow{a} = (m, 1, -m)$, $\overrightarrow{b} = (1, 2m, m)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2, 2, -1)$ *est une base pour tout* $m \in \mathbb{R}$. *Donner les coordonnées du vecteurs* $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ *dans cette base en fonction de* x, y *et* z.

Exercice 15 *Dans* $\mathbb{R}^4$, *soit* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = z + t = 0\}$, *donner une base et la dimension de* F *ainsi que les coordonnés de* $a = (2, -2, -1, 1)$ *dans cette base.*

Exercice 16 *Donner une base et la dimension de* $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ solution de } y'' - 3y' + 3y = 0\right\}$.

Exercice 17 *Donner une base et la dimension de* $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\right\}$.

Exercice 18 *Soit* E *un espace vectoriel et* (e_1, e_2, e_3) *une base de* E. *Montrer que* $(e_1, e_2 + 2e_3, 2e_2 + e_3)$ *est une base de* E. *Quels sont les vecteurs ayant même coordonnées dans les deux bases ?*

Exercice 19 *Dans* $\mathbb{R}_2[X]$, *la famille* $\mathcal{F} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ *où* $Q_1 = X^2 + 1$, $Q_2 = 3X^2 - X + 3$ *et* $Q_3 = X^2 - X + 1$ *est-elle une base ? Si oui donner les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans cette nouvelle base.*

Exercice 20 *Soit* $E = \mathbb{R}^3$, *on considère les ensembles* F *et* G *définis par*

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in E,\ x - y + z = 0\} \\ G &= \{(x, y, z) \in E,\ x + y = x + z = 0\} \end{aligned}$$

Justifier que F *et* G *sont des sous espaces vectoriels de* E *et donner une famille génératrice de chacun d'eux. Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E.

Exercice 21 *Soit* $E = \mathbb{R}_3[X]$, *on définit les ensembles* F *et* G *par*

$$\begin{aligned} F &= \{P \in E,\ P(1) - P'(-1) = P(-1) = 0\} \\ G &= \{P \in E,\ P \text{ impair}\} \end{aligned}$$

1. *Justifier que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E. *Préciser leur dimension.*
2. *Montrer que* $F \oplus G = E$.

Exercice 22 *Soit* $E = \mathbb{R}_3[X]$ *l'ensemble des polynômes de degré au plus* 3 *et à coefficients dans* $\mathbb{R}$. *On définit* F *par* $F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) - P'(1) = 0\}$. *Montrer que* F *est un sous espace vectoriel de* E*..Soit* G *l'ensemble des polynômes pairs, de degré au plus* 3 *et à coefficients réels. Justifier que* G *est un sous-espace vectoriel de* E *et que* $E = F \oplus G$.

Exercice 23

1. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^5$ *tels que* $\dim F = \dim G = 3$, *que dire de* $F \cap G$ *?*
2. *On généralise, soit* E *de dimension* n, F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *tels que* $\dim F + \dim G > n$, *que dire de* $F \cap G$ *? Lorsque* $\dim F + \dim G \leq n$, *les deux sous espaces sont-ils en somme directe ?*

2 Les techniques

Exercice 24 *Dans* $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *on considère* $f_k : x \mapsto e^{kx}$ *pour* $k \in \{0, \cdots n\}$. *Montrer que la famille* $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est libre. Même question avec* $g_k : x \mapsto \sin^k(x)$.

Exercice 25 *Dans* $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *on considère pour* $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \longmapsto |x - k|$. *Montrer que la famille* $(f_0, \cdots, f_n)$ *est libre.*

Exercice 26

1. *Soient* p *et* q *deux entiers naturels, calculer* $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,dt$.

2. *Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k par $f_k(x) = \sin(kx)$. Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.pour $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire de la famille $(f_0, \cdots, f_n)$? Que pensez-vous de la famille $(g_0, \cdots, g_n)$ où $g_k(x) = \cos(kx)$?*

Exercice 27 *Soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$, montrer que la famille $\left(f^k(a)\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base $\mathcal{B}$ de E. Si x a pour coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, quelles sont les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{B}$?*

Exercice 28 *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(X-1)$,..., $P_n = X(X-1)...(X-n+1)$, montrer que $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de E.*

Exercice 29 *Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $k \in \{0, \cdots, n\}$ on définit $P_k(X) = X^{n-k}(1-X)^k$*

1. *Montrer que la famille de polynôme $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E.*
2. *Soit $x \neq 0$ et $i \in \{0, \cdots, n\}$ montrer que*

$$x^i = \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} x^{n-k}(1-x)^k$$

   En déduire les coordonnées de X^i dans cette base.

Exercice 30 *Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E, la famille $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \cdots, x_n + x_1)$ est-elle libre ?*

Exercice 31 *Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E, on pose $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ et pour $k \in \{1, \cdots, n\}$ $v_k = u + e_k$. Montrer que la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est liée si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -1$.*