

## 1 Les basiques

**Exercice 1** *Produits scalaires. Les applications suivantes sont-elles des produits scalaires sur les espaces indiqués ?*

1.  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (x, y)$ ,  $\vec{v} = (x', y')$ ,  $(\vec{u} | \vec{v}) = 5xx' + 3yy'$
2.  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (x, y)$ ,  $\vec{v} = (x', y')$ ,  $(\vec{u} | \vec{v}) = xx' - 3yy'$
3.  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (x, y)$ ,  $\vec{v} = (x', y')$ ,  $(\vec{u} | \vec{v}) = xx'$ .
4.  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (x, y)$ ,  $\vec{v} = (x', y')$ ,  $(\vec{u} | \vec{v}) = 2xx' + 5yy' - xy' - x'y$ .
5.  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , si  $P = \sum_{i=0}^3 a_i X^i$  et  $Q = \sum_{i=0}^3 b_i X^i$ ,  $(P | Q) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$ .
6.  $E = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $(P | Q) = \sum_{k=0}^n P(k) Q(k)$ .
7.  $E = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $(P | Q) = \sum_{k=0}^2 P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0)$ .
8.  $E = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $(P | Q) = \int_0^1 P(t) Q(t) (1-t^2) dt$
9.  $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ ,  $(f | g) = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$
10.  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $(f | g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$

**Exercice 2** *Pour  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (x, y)$ ,  $\vec{v} = (x', y')$ , et le produit scalaire  $(\vec{u} | \vec{v}) = 2xx' + 5yy' - xy' - x'y$ , donner une base orthonormée construite à partir de la base canonique. On commencera par prouver que l'on a bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$ .*

**Exercice 3** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $(c_1, \dots, c_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ , montrer que*

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 c_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 c_k \right)$$

**Exercice 4** *Pour  $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on définit  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + 5y^2 - 4xy}$ . Montrer que l'on a bien défini une norme euclidienne, et donner le produit scalaire qui lui correspond.*

**Exercice 5** *Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels, montrer que :*

1.  $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$
2.  $F \subset (F^\perp)^\perp$
3.  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
4.  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

*Que se passe-t-il lorsque  $E$  est un espace euclidien ?*

**Exercice 6** *Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, soit  $x \in E$ ,  $x \neq \vec{0}$  fixé, on définit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\varphi(y) = (x | y)$ . Montrer que  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle sur  $\mathbb{R}$ , préciser son noyau.*

**Exercice 7** *Dans  $\mathbb{R}^4$  euclidien canonique, soit  $H_1 = \text{Vect}(1, 1, 1, 1)^\perp$  et  $H_2 = \text{Vect}(1, -1, -1, 1)^\perp$ , on définit alors  $H = H_1 \cap H_2$ .*

1. Donner un système d'équation de  $H$  puis une base orthogonale de  $H$ .
2. Déterminer la matrice, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , de la symétrie orthogonale par rapport à  $H$ .

**Exercice 8** Soit  $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire (on le prouvera)  $(f | g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ . Donner la projection orthogonale de  $\varphi : x \mapsto 1-x$  sur l'espace engendré par  $(x \mapsto 1, x \mapsto \sin \pi x, x \mapsto \cos \pi x)$ . (Il peut être judicieux de vérifier que la famille des trois fonctions données est orthogonale ...).

**Exercice 9** Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , si  $P = \sum_{i=0}^3 a_i X^i$  et  $Q = \sum_{i=0}^3 b_i X^i$ , on définit le produit scalaire  $(P | Q) = \sum_{i=0}^3 a_i b_i$ . Soit  $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$ , justifier que  $H$  est un hyperplan et en donner une base. Déterminer  $H^\perp$  et donner la projection orthogonale de  $X^3$  sur  $H$ .

**Exercice 10** Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  On définit sur  $E$  le produit scalaire

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{+1} \frac{P(t)Q(t)}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que  $\varphi$  est bien un produit scalaire.
2. Orthogonaliser la base canonique.

**Exercice 11** Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  muni du produit scalaire  $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ . Orthogonaliser la famille  $(1, X, X^2)$  et donner le projeté orthogonal de  $X^3$  sur le sous espace  $F = \text{Vect}(1, X, X^2)$ . En déduire  $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$ .

**Exercice 12** Soit  $E$  un espace euclidien, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $a \neq \vec{0}$  un vecteur de  $E$ . On définit  $f : E \rightarrow E$  par  $f(x) = x + \alpha(x | a)a$ .

1. Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit une projection, reconnaître alors  $f$ .
2. Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit une symétrie, reconnaître alors  $f$ .

## 2 Les techniques

**Exercice 13** Soit  $E$  un espace euclidien et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de  $n$  vecteurs unitaires de  $E$  tels que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x | e_k)^2$$

Montrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Exercice 14** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , montrer que pour  $(P, Q) \in E^2$ , l'expression  $\sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$  définit un produit scalaire. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

**Exercice 15** Soit  $E = \mathcal{C}^2([0, 1])$ , on note  $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$  et  $G = \{f \in E, f'' = f\}$ . On définit  $(f | g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$ . Montrer que cela définit un produit scalaire et que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.

**Exercice 16** Soit  $E$  un espace euclidien,  $a \in E$  tel que  $\|a\| = 1$ , on définit  $\langle x | y \rangle = (x | y) + k(x | a) \times (y | a)$ . Donner une CNS sur  $k$  pour que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  soit un produit scalaire sur  $E$ .

**Exercice 17** On se place sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

1. Montrer que  $(P | Q) = \sum_{k=0}^n P(k) Q(k)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

2. Déterminer la famille de polynôme  $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$  de  $E$  telle que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, L_i(j) = \delta_{i,j} \text{ où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

3. Montrer que l'on obtient une base orthonormée de  $E$ .

4. Soit  $P \in E$ , quelles sont les coordonnées de  $P$  dans cette base ?

**Exercice 18** Soit  $E$  un espace euclidien et  $p \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\begin{aligned} p \text{ projecteur orthogonal} &\iff p \circ p = p \text{ et } \forall (x, y) \in E^2, (p(x) | y) = (x | p(y)) \\ &\iff p \circ p = p \text{ et } \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\| \end{aligned}$$

**Exercice 19** Déterminer  $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x \sin t + y \cos t - t)^2 dt$ . On introduira un produit scalaire judicieux, sur un espace vectoriel ad-hoc.

**Exercice 20** Soit  $E$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, x \perp y = 0 \implies f(x) \perp f(y).$$

1. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ , on pose  $f_i = f(e_i)$ , calculer  $(f_i + f_j | f_i - f_j)$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ .

2. En déduire qu'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall x \in E, \|f(x)\| = k \|x\|$ .

**Exercice 21** Soit  $E$  un espace euclidien, montrer que

$$p \text{ projecteur orthogonal} \iff p \circ p = p \text{ et } \forall (x, y) \in E, (p(x) | y) = (x | p(y))$$

**Exercice 22** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour  $A = ((a_{i,j})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on définit la trace de  $A$  par  $tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$ .

1. Montrer que  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, tr({}^tA) = tr(A)$  et  $tr(AB) = tr(BA)$ .

2. Montrer que  $(A | B) = tr({}^tAB)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

3. On pose  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}$ , déterminer  $U^k$  pour  $0 \leq k \leq n$ , comparer  ${}^tU^k$  et  $U^{n-k}$ .

4. Montrer que la famille  $(U^k)_{0 \leq k \leq n-1}$  est une famille orthogonale.

5. Soit  $F = \text{Vect}((U^k)_{0 \leq k \leq n-1})$ , donner l'expression de la projection orthogonale de  $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$  sur  $F$ .