1 Les basiques

Exercice 1 *Un peu de topologie, représenter les ensembles suivants et indiquer ceux qui sont des ouverts. On pourra utiliser (et démontrer, mais cela suppose de bien utiliser la notion de continuité) le résultat suivant : Soit* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *continue, alors l'ensemble* $\mathcal{O}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)>0\right\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.

(1) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>a\right\}$

(2) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ b>x>a\right\}$

(3) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0 \text{ et } \|(x,y)\|\leq 1\right\}$

(4) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy>0\right\}$

(5) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|<1 \text{ et } y\geq 2\right\}$

(6) $A=\left\{M\in\mathbb{R}^2,\ d(M,M_0)\leq 2\right\}$ *où* $M_0=(1,-1)$

(7) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \dfrac{x^2}{4}+y^2<1\right\}$

(8) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2-y^2>1\right\}$

Exercice 2 *Une partie* A *de* $\mathbb{R}^2$ *est dite bornée si* $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall(x,y)\in A,\ \|(x,y)\|\leq M$. *Montrer qu'un pavé* $P=[a,b]\times[c,d]$ *est un fermé borné de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 *Etudier la continuité ou le prolongement par continuité des fonctions suivantes :*

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$

(2) $f(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=1$

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

(4) $f(x,y)=y\sin\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$, $f(a,0)=0$

(5) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$, $f(0,0)=0$

(6) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+2y^2}$, $f(0,0)=\dfrac{1}{3}$

(7) $f(x,y)=\dfrac{x}{|x|+|y|}$

(8) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{|x|+|y|}$

(9) $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}+\arctan\dfrac{y}{x}$

(10) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}$, $f(a,a)=\cos(a)$

(11) $f(x,y)=\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$

(12) $f(x,y)=\dfrac{\sin x-y}{x-\sin y}$

(13) $f(x,y)=\dfrac{yx^2}{x^2-y}$ *Prolongement en* $(0,0)$? *(Utiliser* $f\left(x,x^2+x^p\right)$, *p à choisir)*

(14) $f(x,y)=\dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$ *Prolongement en* $(0,0)$? *(Utiliser* $f\left(t^p,t^q\right)$ *)*

(15) $f(x,y)=x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$

2 Les techniques

Exercice 4 *Soit* f *définie par* $f(x,y)=\dfrac{xy}{\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y}$

1. *Quel est son domaine de définition ? Déterminer les limites en* 0 *de* $f(x,x)$ *et de* $f\left(x,-x+x^2\right)$. *Conclusion ?*
2. *Montrer que* $\forall(a,h)\in\mathbb{R}^2,\ \operatorname{sh}(a+h)+\operatorname{sh}(-a)=2\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2}\right)\operatorname{ch}\left(a+\frac{h}{2}\right)$. *Soit* $a\neq 0$, *déterminer* $\lim\limits_{h\to 0^+} f(a+h,-a)$, *conclusion ?*

Exercice 5 *On dit qu'une fonction* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *est lipschitzienne s'il existe un réel* k *tel que :*

$$\forall(M,P)\in\mathbb{R}^2, |f(M)-f(P)|\leq k\,\|M-P\|$$

1. *Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue.*
2. *On dit qu'une fonction* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *est lipschitzienne par rapport à la première variable s'il existe un réel* k_1 *tel que :*

$$\forall(x_1,x_2,y)\in\mathbb{R}^3, |f(x_1,y)-f(x_2,y)|\leq k_1.|x_1-x_2|$$

On définit de manière analogue les fonctions lipschitziennes par rapport à la deuxième variable. Montrer que, si une fonction est lipschitzienne par rapport aux deux variables, alors elle est continue.