

## 1 Les basiques

**Exercice 1** Résoudre,  $m$  désigne un réel quelconque,  $x$  est l'inconnue cherchée:

$$\begin{aligned} (E_1) : x - 1 &= \sqrt{x+2} & (E_2) : x - 1 &\leq \sqrt{x+2} \\ (E_3) : \sqrt{2x+m} &= x + 1 & (E_4) : \sqrt{2x+m} &\leq x + 1 \\ (E_5) : \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} &= 3 & (E_6) : \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} &= m \end{aligned}$$

**Solution.** Pour  $(E_1)$  : Avant tout le problème ne se pose que sur  $[-2, +\infty[$ , domaine sur lequel l'égalité et l'inégalité sont définies. Pour l'égalité, on est tenté de passer au carré. Mais deux nombres peuvent avoir même carré sans être égaux (c'est le cas de 1 et  $-1$ ). Or ici  $\sqrt{x+2}$  est positif donc

$$\begin{aligned} x - 1 = \sqrt{x+2} &\iff \begin{cases} (x-1)^2 = x+2 \\ \text{et } x-1 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \text{et } x-1 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \geq 1 \text{ ou } x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \leq 1 \\ \text{et } x-1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution est donc  $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$ .

Pour  $(E_2)$  : le plus simple est d'introduire la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x - 1 - \sqrt{x+2}$ . Alors  $f$  est définie, continue sur  $[-2, +\infty[$ , elle ne s'annule que si  $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle garde un signe constant sur  $[-2, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}]$  et sur  $[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, +\infty[$  (sinon elle s'annule une autre fois). Il reste à déterminer ce signe en regardant la valeur en  $-2$  et en  $7$ , car  $f(-2) = -3 \leq 0$  et  $f(7) = 3 \geq 0$ . Ainsi

$$x - 1 \leq \sqrt{x+2} \iff x \in \left[-2, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right]$$

Pour  $(E_3)$  c'est pareil

$$\sqrt{2x+m} = x + 1 \iff \begin{cases} (x+1)^2 = 2x+m \\ \text{et } x+1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = m-1 \\ \text{et } x \geq -1 \end{cases}$$

Si  $m < 1$  il n'y a pas de solution. Si  $m \geq 1$ , on a, a priori deux solutions  $\sqrt{m-1}$  toujours acceptable et  $-\sqrt{m-1}$  que l'on doit parfois exclure lorsqu'elle est inférieure à  $-1$ . On résout donc l'inégalité

$$-\sqrt{m-1} < -1 \iff \sqrt{m-1} > 1$$

Puisque la fonction  $f : m \mapsto \sqrt{m-1}$  est continue, strictement croissante et que  $f(2) = 1$ , on a  $f(m) > 1 \iff m > 2$ .

Conclusion : On a deux solutions si et seulement si  $m \in [1, 2]$  qui sont  $-\sqrt{m-1}$  et  $\sqrt{m-1}$ , une unique solution si  $m > 2$ , aucune si  $m < 1$ .

Pour  $(E_4)$ , on discute selon la valeur de  $m$ . On introduit  $\varphi(x) = (x+1) - \sqrt{2x+m}$ , qui est une fonction définie et continue sur  $\left[-\frac{m}{2}, +\infty\right[$ .

Si  $m < 1$ , l'équation  $\varphi(x) = 0$  n'a pas de solution, ainsi  $\varphi$  garde un signe constant (d'après le TVI, sinon elle change de signe), puisque  $\varphi\left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1-m}{2} > 0$  elle est positive et  $(E_4)$  est toujours vraie.

Si  $m \in [1, 2]$ , l'équation  $\varphi(x) = 0$  a deux solutions  $-\sqrt{m-1}$  et  $\sqrt{m-1}$ . Sur les intervalles  $\left[-\frac{m}{2}, -\sqrt{m-1}\right]$ ,  $[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$

et  $[\sqrt{m-1}, +\infty[$  elle garde un signe constant. On détermine son signe avec  $\varphi\left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{2-m}{2} > 0$ ,  $\varphi(0) = 1 - \sqrt{m} < 0$  et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = +\infty$ . Ainsi  $\sqrt{2x+m} \leq x+1$  sur  $\left[-\frac{m}{2}, -\sqrt{m-1}\right]$  et  $[\sqrt{m-1}, +\infty[$ .

Enfin si  $m \geq 2$ , l'équation a une seule racine, sur  $\left[-\frac{m}{2}, \sqrt{m-1}\right]$  et sur  $[\sqrt{m-1}, +\infty[$ , garde un signe constant, puisque

$\varphi\left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{2-m}{2} < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = +\infty$ , on a  $\sqrt{2x+m} \leq x+1$  sur  $[\sqrt{m-1}, +\infty[$  ouf !

Pour  $(E_5)$ , on ruse un peu, on a  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 3$ . Réflexe, expression conjuguée ! Cela donne

$$\frac{(x+1) - (x-4)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}} = 3 \iff \frac{5}{3} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$$

Si on pose  $a = \sqrt{x+1}$  et  $b = \sqrt{x-4}$ , on a donc  $a - b = 3$  et  $a + b = \frac{5}{3}$  d'où  $a = \sqrt{x+1} = \frac{7}{3}$  et  $b = \sqrt{x-4} = -\frac{2}{3}$ . Pas de solutions !

Pour  $(E_6)$ , même méthode  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = m \implies \frac{5}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}} = m$ . Si  $m = 0$ , pas de solution (cela donne  $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-4} \implies x+1 = x-4 \dots$ ). On suppose donc  $m \neq 0$ , on obtient avec  $\sqrt{x+1}$  et  $b = \sqrt{x-4}$ ,  $a - b = m$  et  $a + b = \frac{5}{m}$  d'où  $a = \sqrt{x+1} = \frac{5}{2m} + \frac{m}{2} = \frac{5+m^2}{2m}$  et  $b = \sqrt{x-4} = \frac{5}{2m} - \frac{m}{2} = \frac{5-m^2}{2m}$ .

On remarque que  $a + b = \frac{5}{m}$ , donc puisque  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  si  $m \leq 0$  il n'y a pas de solution. On suppose donc  $m > 0$ , on doit alors avoir  $b = \frac{5}{2m} - \frac{m}{2} = \frac{5-m^2}{2m} \geq 0$  ce qui impose  $m \leq \sqrt{5}$ . On a alors

$$x = \left( \frac{5+m^2}{2m} \right)^2 - 1$$

et l'on peut vérifier que  $\left( \frac{5-m^2}{2m} \right)^2 + 4 = \left( \frac{5+m^2}{2m} \right)^2 - 1$ . ■

**Exercice 2** Simplifier  $a^{\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}}$  pour  $a > 1$ .

**Solution.** On sait que  $u^v = e^{v \ln u}$  si  $u > 0$ , donc  $a^{\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln a)}{\ln a} \times \ln a\right) = \exp(\ln(\ln a)) = \ln a$ . ■

**Exercice 3** Résoudre l'équation  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

**Solution.** Les expressions n'ont de sens que si  $x > 0$ . On passe alors au logarithme (népérien) pour obtenir  $\sqrt{x} \ln x = \frac{x}{2} \ln x \iff \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \ln x = 0 \iff \begin{cases} \ln x = 0 \\ \text{ou} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases}$  Les solutions sont donc  $x = 1$  et  $x = 4$ . ■

**Exercice 4** Résoudre  $2^{x^3} = 3^{x^2}$ .

**Solution.** On passe au logarithme (népérien) pour obtenir  $x^3 \ln 2 = x^2 \ln 3 \iff x^2(x \ln 2 - \ln 3) = 0$ . On a donc deux solutions  $x = 0$  et  $x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ . ■

**Exercice 5** Résoudre  $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$  et  $\begin{cases} \ln xy = 5 \\ (\ln(x) \ln(y))^2 = 36 \end{cases}$

**Solution.** Pour le premier,  $x$  et  $y$  doivent être positifs, on a alors  $\begin{cases} \ln xy = \ln 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$  ainsi  $x$  et  $y$  sont les solutions de  $Z^2 - 4Z + 2 = 0$ . Les racines de ce polynôme sont  $2 \pm \sqrt{2}$  d'où  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ .

Pour le second, on procède de même, on doit avoir  $x$  et  $y$  positifs et on a  $\begin{cases} \ln x + \ln y = 5 \\ \ln(x) \ln(y) = 6 \text{ ou } -6 \end{cases}$  Ainsi  $\ln x$  et  $\ln y$  sont racines de  $Z^2 - 5Z + 6$  ou de  $Z^2 - 5Z - 6$ . Ce qui donne  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} e^2 \\ e^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^3 \\ e^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-1} \\ e^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^6 \\ e^{-1} \end{pmatrix} \right\}$ . ■

**Exercice 6** Résoudre  $e^x + e^{1-x} - e - 1 = 0$

**Solution.** On pose  $X = e^x$  car  $e^{1-x} = \frac{e}{e^x}$ , on obtient  $X + \frac{e}{X} - e - 1 = \frac{X^2 - (e+1)X + e}{X}$ . Une racine évidente est  $X = 1$ , l'autre est  $X = e$  (produit des racines). D'où  $x = 0$  ou  $x = 1$ . ■

**Exercice 7** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une expression plus simple.

(1)  $e^{\frac{1}{2} \ln(x^2)}$ , (2)  $e^{\frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$ , (3)  $x - \ln(xe^x)$ , (4)  $x^{\frac{1}{\ln(x)}}$ , (5)  $xe^{1-\ln(x)}$

**Solution.** (1)  $D_f = \mathbb{R}^*$  et  $f(x) = e^{\ln \sqrt{x^2}} = |x|$  (2)  $D_f = \mathbb{R}$  et  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  (3)  $D_f = ]0, +\infty[$  et  $f(x) = x - \ln x - x = -\ln x$  (4)  $D_f = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  et  $f(x) = e^{\frac{\ln x}{\ln x}} = e$  (5)  $D_f = ]0, +\infty[$  et  $f(x) = x \times \frac{e}{x} = e$ . ■

**Exercice 8** Déterminer les domaines de définition, de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ,  $f_2(x) = x^{\ln x}$ ,  $f_3(x) = \ln x^{\ln x}$ ,  $f_4(x) = x \left| 1 + \frac{1}{x} \right|^{1+x}$

Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de  $f_1, f_2$  et  $f_3$  (pour  $f_4$  c'est beaucoup plus dur !).

**Solution.** On a  $f_1(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$  est définie sur  $D_{f_1} = ]0, +\infty[$  continue et dérivable sur  $D_{f_1}$  avec  $f_1'(x) = f_1(x) \times \frac{1 - \ln x}{x^2}$ . On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$  car  $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = 0$  (car  $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ ,  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  et  $e^u \xrightarrow{u \rightarrow -\infty} 0$ ).

On a  $f_2(x) = e^{\ln^2 x}$  est définie sur  $D_{f_2} = ]0, +\infty[$  continue et dérivable sur  $D_{f_2}$  avec  $f_2'(x) = f_2(x) \times \frac{2 \ln x}{x}$ . On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = +\infty$ .

On a  $f_3(x) = e^{\ln(x) \ln(\ln x)}$  est définie sur  $]1, +\infty[$ , continue, dérivable sur cet ensemble et  $f_3'(x) = f_3(x) \times \left( \frac{\ln \ln x}{x} + \frac{\ln(x)}{x \ln x} \right) = f_3(x) \times \left( \frac{1 + \ln(\ln x)}{x} \right)$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$ . En 1, on pose  $u = \ln x$ , alors  $\ln(x) \ln(\ln x) = u \ln(u)$ , or  $u \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$  donc  $\ln(x) \ln(\ln x) = u \ln(u) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x) = 1$ .

On a  $f_4(x) = x e^{(1+x) \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}$  est définie sur  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ . Posons  $g(x) = e^{(1+x) \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}$ , alors

$$\begin{aligned} f_4(x) &= g(x) + x \left( \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| + (1+x) \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \right) g(x) \\ &= g(x) \left( 1 + x \left( \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= x g(x) \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| f_4(x) \text{ ouf !} \end{aligned}$$

Pour les limites, c'est du lourd !

En  $-1$ , on a  $(1+x) \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = (1+x) \ln |1+x| - (1+x) \ln |x|$ . Or  $u = 1+x \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0$  donc  $(1+x) \ln |1+x| = u \ln |u| \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$  et  $-(1+x) \ln |x| \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0$  donc

$$f_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} -1$$

En  $0$ , on a  $(1+x) \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = (1+x) \ln |1+x| - (1+x) \ln |x| = (1+x) \ln |1+x| - x \ln |x| - \ln |x|$  ainsi

$$f_4(x) = x e^{-\ln |x|} e^{(1+x) \ln |1+x| - x \ln |x|} = \frac{x}{|x|} e^{(1+x) \ln |1+x| - x \ln |x|}$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) = 1$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_4(x) = -1$ .

En  $-\infty$ , on a  $u = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^-$  donc  $x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$  ainsi  $\ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| + x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$  d'où

$$f_4(x) = x e^{(1+x) \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

de même

$$f_4(x) = x e^{(1+x) \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

■

**Exercice 9** Déterminer le domaine de définition de  $f(x) = \ln \ln x$ . Calculer sa dérivée.

On définit la suite  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par  $f_0(x) = x$ , et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f_{k+1}(x) = \ln(f_k(x))$ . Déterminer le domaine de définition de  $f_k$ . Exprimer la dérivée de  $f_{k+1}$  en fonction des  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Solution.** La fonction  $f$  est définie sur  $]1, +\infty[$  et dérivable sur cet intervalle avec  $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$ . On a  $f_1(x) = \ln x$ ,  $f_2(x) = \ln(\ln x)$ ,  $f_3(x) = \ln(\ln(\ln x))$  est définie si  $\ln(\ln x) > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e$  et sur  $]e, +\infty[$  on a  $f_3'(x) = \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln x)}$ . Pour  $f_4(x) = \ln(f_3(x))$ ,  $f_4(x)$  est défini si

$$f_3(x) > 0 \iff \ln(\ln(\ln x)) > 0 \iff \ln(\ln x) > 1 \iff \ln x > e \iff x > e^e$$

et  $f'_4(x) = \frac{f'_3(x)}{f_3(x)} = \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln x) \ln(\ln(\ln x))}$ . Par récurrence pour  $k \geq 3$ , on a  $f_k$  est définie sur  $]e^{\dots^e}, +\infty[$  où il y a une tour de  $k-2$  puissance et

$$f'_k(x) = \frac{1}{f_1(x) f_2(x) \cdots f_{k-1}(x)}$$

■

**Exercice 10** Exprimer  $\operatorname{ch} 3x$  comme un polynôme en  $\operatorname{ch} x$  puis exprimer  $\operatorname{sh} 2x$  à l'aide de  $\operatorname{ch} x$  et  $\operatorname{sh} x$ .

**Solution.** On a  $\operatorname{ch} 3x = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x})$  où  $e^{3x} = (e^x)^3 = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^3$  et  $e^{-3x} = (e^{-x})^3 = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^3$ . Avec

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ et } (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Il vient  $\operatorname{ch} 3x = \operatorname{ch}^3 x + 3 \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x$ , puis on utilise  $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$  pour obtenir

$$\operatorname{ch}(3x) = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x$$

On procède de même pour avoir

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

■

**Exercice 11** Soit  $f(x) = \frac{e^{5x} + e^{-x}}{e^{4x} - 1}$ . Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ . Montrer que  $f(x) = \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{sh} 2x}$ , puis exprimer  $f$  uniquement à l'aide de la fonction  $\operatorname{sh}$ . Étudier les variations de  $f$ .

**Solution.** On a  $\frac{e^{5x} + e^{-x}}{e^{4x} - 1} = \frac{e^{2x} \times (e^{3x} + e^{-3x})}{e^{2x} \times (e^{2x} - e^{-2x})} = \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{sh} 2x}$ . On utilise l'exo précédent car

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(3x) &= 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x = (4 \operatorname{ch}^2 x - 3) \operatorname{ch} x = (4(1 + \operatorname{sh}^2 x) - 3) \operatorname{ch} x \\ &= (4 \operatorname{sh}^2 x + 1) \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \end{aligned}$$

d'où  $f(x) = \frac{4 \operatorname{sh}^2 x + 1}{2 \operatorname{sh} x} = 2 \operatorname{sh} x + \frac{1}{2 \operatorname{sh} x}$ . La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ , elle est impaire. On l'étudie sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall x \neq 0$ ,

$$f'(x) = 2 \operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x} (4 \operatorname{sh}^2 x - 1).$$

La dérivée s'annule, sur  $]0, +\infty[$  en  $\alpha = \operatorname{arg} \operatorname{sh} \frac{1}{2}$  (qui vaut  $\ln \phi = \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ), elle est décroissante sur  $]0, \alpha]$  puis croissante sur  $[\alpha, +\infty[$ . On a  $f(\alpha) = 2 \operatorname{sh} \alpha + \frac{1}{2 \operatorname{sh} \alpha} = 2$ . ■

**Exercice 12** Calculer  $2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$  lorsque  $x = \frac{1}{2} \ln 3$ .

**Solution.** On a  $2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x + e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + e^{-x} = \frac{e^x}{2} + \frac{3}{2e^x}$  or  $e^x = \ln \sqrt{3}$  ainsi  $2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ . ■

**Exercice 13** Montrer que pour tout  $x$  réel et tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\left(\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}\right)^n = \frac{1 + \operatorname{th} nx}{1 - \operatorname{th} nx}$ .

**Solution.** On a  $\forall u \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{1 + \operatorname{th} u}{1 - \operatorname{th} u} = \frac{1 + \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}}{1 - \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}} = \frac{\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} = \frac{e^u}{e^{-u}}$  d'où avec  $u = x$ ,  $\left(\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}\right)^n = \frac{e^{nx}}{e^{-nx}}$  puis avec  $u = nx$ ,  $\frac{e^{nx}}{e^{-nx}} = \frac{1 + \operatorname{th} nx}{1 - \operatorname{th} nx}$ . ■

**Exercice 14** Simplifier les expressions suivantes : (a)  $\operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y$  (b)  $\operatorname{ch}^2 x \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y$

**Solution.** (a)  $\operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y = \operatorname{sh}^2 x (1 - \sin^2 y) + (1 + \operatorname{sh}^2 x) \sin^2 y = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y$ . On a également  $\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y = \operatorname{ch}^2 x - 1 + 1 - \cos^2 y = \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y$ .

Puis (b)  $\operatorname{ch}^2 x \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y = (1 + \operatorname{sh}^2 x) \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x (1 - \cos^2 y) = \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x$ . ■

**Exercice 15** Simplifier la fonction  $\arg \operatorname{sh}(2x\sqrt{1+x^2})$ .

**Solution.** La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \arg \operatorname{sh}(2x\sqrt{1+x^2})$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+(2x\sqrt{1+x^2})^2}} \times \left( 2\sqrt{1+x^2} + \frac{2x \times 2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+4x^2(1+x^2)}} \times \frac{(1+x^2)+x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x^4+4x^2+1}} \times \frac{(1+x^2)+x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{(2x^2+1)^2}} \times \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \text{ car } 2x^2+1 \geq 0 \text{ donc } \sqrt{(2x^2+1)^2} = 2x^2+1 \end{aligned}$$

Ainsi  $f' = (2 \arg \operatorname{sh})'$  sur  $\mathbb{R}$ . Il existe donc une constante  $C$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \arg \operatorname{sh}(x) + C$ . Or  $f(0) = 0 \implies f(x) = 2 \arg \operatorname{sh}(x)$  sur  $\mathbb{R}$ . ■

**Exercice 16** Que pensez vous de la fonction  $f(x) = \arg \operatorname{th} x - \arg \operatorname{th} \frac{1}{x}$  ?

**Solution.** Elle n'est pas définie... (il faut  $x \in ]-1, 1[ \iff |x| < 1$  et  $\frac{1}{x} \in ]-1, 1[ \iff |x| > 1$ ) ■

**Exercice 17** Résoudre  $\arg \operatorname{th} x = \arg \operatorname{ch} \frac{1}{x}$ .

**Solution.** Le domaine de définition de l'équation est  $]0, 1[$  (car  $\arg \operatorname{ch}$  est définie sur  $[1, +\infty[$  et  $\arg \operatorname{th}$  sur  $] -1, 1[$ ). On se place donc sur  $]0, 1[$  et on passe à la tangente hyperbolique qui est une bijection

$$\arg \operatorname{th} x = \arg \operatorname{ch} \frac{1}{x} \iff x = \operatorname{th} \left( \arg \operatorname{ch} \frac{1}{x} \right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}{\frac{1}{x}} \iff x = x \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{1-x^2} \text{ car } x > 0$$

On résout donc  $x = \sqrt{1-x^2} \iff \begin{cases} x^2 = 1-x^2 \\ x \geq 0 \text{ (obligatoire car } x \in ]0, 1[) \end{cases} \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

La seule solution est  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . ■

**Exercice 18** Résoudre  $\arg \operatorname{sh}(x-1) = \arg \operatorname{ch} \sqrt{x}$ .

**Solution.** On passe au sinus hyperbolique qui est une bijection sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \arg \operatorname{sh}(x-1) = \arg \operatorname{ch} \sqrt{x} &\iff x-1 = \operatorname{sh}(\arg \operatorname{ch} \sqrt{x}) \\ &\iff x-1 = \sqrt{(\sqrt{x})^2 - 1} = \sqrt{x-1} \\ &\iff \begin{cases} (x-1)^2 = x-1 \\ \text{et } x-1 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x-1)^2 = x-1 \\ \text{et } x-1 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff x=1 \text{ ou } x=2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = \{1, 2\}$$

■

**Exercice 19** Calculer  $\operatorname{sh}(\ln 2)$  et  $\operatorname{sh}(\ln 3)$ , puis  $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$  et  $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$  en posant  $x = \operatorname{sh} t$ .

**Solution.** On a  $\operatorname{sh} \ln 2 = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$  et  $\operatorname{sh} \ln 3 = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{3}$ . Les deux intégrales existent car  $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$  sont  $\mathcal{C}^0$  sur  $[0, \frac{3}{4}]$  et  $[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$  respectivement. Le changement de variable proposé est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc

sur les intervalles où  $t$  varie (on ne sait pas encore où !!). Pour la première, on a donc  $dx = \operatorname{ch} t dt$ ,  $\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{ch} t dt}{(1+\operatorname{sh}^2 t)\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{ch}^3 t} = \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t}$ . Si  $x = 0$  alors  $t = \operatorname{arg sh} 0 = 0$ , si  $x = \frac{3}{4}$  alors  $x = \operatorname{arg sh} \frac{3}{4} = \ln 2$  (car  $\operatorname{sh} \ln 2 = \frac{3}{4}$ ).  
Ainsi

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = [\operatorname{th} t]_0^{\ln 2} = \operatorname{th}(\ln 2) = \frac{\operatorname{sh} \ln 2}{\operatorname{ch} \ln 2} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{3}{5}$$

Pour la seconde,  $\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{sh}^2 t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t}$ , si  $x = \frac{3}{4}$  alors  $t = \ln 2$  et si  $x = \frac{4}{3}$  alors  $t = \ln 3$  d'où

$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t}$$

On travaille par analogie, on dérive  $\frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}$ , on obtient  $\left(\frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 - \operatorname{ch}^2}{\operatorname{sh}^2} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2}$  d'où

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = \left[-\frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

Avec  $\operatorname{sh} \ln 2 = \frac{3}{4}$ ,  $\operatorname{ch} \ln 2 = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$ ,  $\operatorname{sh} \ln 3 = \frac{4}{3}$ ,  $\operatorname{ch} \ln 3 = \sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$ , on obtient  $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} - \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{12}$ . ■

## 2 Les Techniques

**Exercice 20** Calculer  $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ , en déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  diverge vers  $+\infty$ .

**Solution.** On a

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \ln(2) - \ln(1) && \leftarrow \text{indice } k=1 \\ &+ \ln(3) - \ln(2) && \leftarrow \text{indice } k=2 \\ &\vdots \\ &+ \ln(n) - \ln(n-1) && \leftarrow \text{indice } k=n-1 \\ &+ \ln(n+1) - \ln(n) && \leftarrow \text{indice } k=n \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

Ainsi  $v_n = \ln(n+1)$ . On sait que pour  $x > -1$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ , on applique cette inégalité avec  $x = \frac{1}{k}$  pour obtenir

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

On peut sommer ces inégalités pour avoir

$$v_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = u_n$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\left. \begin{array}{l} v_n \leq u_n \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right\} \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

■

**Exercice 21** Résoudre  $\begin{cases} e^x e^y = a \\ xy = 1 \end{cases}$  d'inconnues  $x \leq y$  réelles, en fonction du paramètre réel  $a$ .

**Solution.** On a  $\begin{cases} e^{x+y} = a \\ xy = 1 \end{cases}$  puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive, si  $a \leq 0$  il n'y a pas de solution.

Si  $a > 0$ , on obtient  $\begin{cases} x + y = \ln a \\ xy = 1 \end{cases}$  ainsi  $x$  et  $y$  sont solutions de  $Z^2 - \ln(a)Z + 1$ . On a  $\Delta = \ln^2 a - 4 \geq 0 \iff \ln^2 a \geq 4 \iff \begin{cases} \ln a \geq 2 \text{ ou} \\ \ln a \leq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a \geq e^2 \text{ ou} \\ a \leq e^{-2} \end{cases}$ .

Si  $a \in ]0, e^{-2}[ \cup ]e^2, +\infty[$ , la solution est  $x = \frac{\ln a - \sqrt{\ln^2 a - 4}}{2}$  et  $y = \frac{\ln a + \sqrt{\ln^2 a - 4}}{2}$ . Si  $a = e^2$  ou  $a = e^{-2}$ , la solution est  $x = y = \frac{\ln a}{2}$  sinon il n'y a pas de solution. ■

**Exercice 22** Montrer que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \arg \operatorname{sh} x &= \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \\ \forall x \geq 1, \arg \operatorname{ch} x &= \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ \forall x \in ]-1 + 1[, \arg \operatorname{th} x &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

**Solution.** Pour le premier, soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $y = \arg \operatorname{sh} x$  alors  $e^y = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y$ . On sait que  $\operatorname{sh} \arg \operatorname{sh} x = x$  et que  $\operatorname{ch} \arg \operatorname{sh} x = \sqrt{1+x^2}$ . Ainsi

$$e^y = \sqrt{x^2 + 1} + x \implies y = \arg \operatorname{sh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

Rappel :  $\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y$  et  $\operatorname{ch} y \geq 1 \geq 0$  donc  $\operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}$  donc  $\operatorname{ch} \arg \operatorname{sh} x = \sqrt{1+x^2}$ .

Pour le second, soit  $x \geq 1$  et  $y = \arg \operatorname{ch} x$ , on a  $e^y = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y$ . On sait que  $\operatorname{ch} \arg \operatorname{ch} x = x$  et que  $\operatorname{sh} \arg \operatorname{ch} x = \sqrt{x^2 - 1}$ . Ainsi

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \implies y = \arg \operatorname{ch} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

Rappel :  $\operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1 \implies |\operatorname{sh} y| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}$ , un argument cosinus hyperbolique est toujours positif, donc si  $y = \arg \operatorname{sh} x$ , on a  $\operatorname{sh} y \geq 0$  et ainsi  $\operatorname{sh} \arg \operatorname{ch} x = \sqrt{x^2 - 1}$ .

Pour le dernier, soit  $x \in ]-1 + 1[$  et  $y = \arg \operatorname{th} x$ , on a  $\operatorname{th} y = x$ , mais  $\operatorname{th} y = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$ . Ainsi

$$\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x \iff e^{2y} - 1 = x(e^{2y} + 1) \iff e^{2y}(1 - x) = 1 + x \iff_{x \neq 1} e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

En passant au logarithme, on obtient

$$y = \arg \operatorname{th} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

■

**Exercice 23** Pour  $a$  et  $b$  réels et  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $C = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + kb)$  et  $S = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a + kb)$  (utiliser  $C + S$  et  $C - S$ ).

**Solution.** On a

$$\begin{aligned} C + S &= \sum_{k=0}^n (\operatorname{ch}(a + kb) + \operatorname{sh}(a + kb)) = \sum_{k=0}^n e^{a+kb} = \sum_{k=0}^n e^a e^{kb} = e^a \sum_{k=0}^n (e^b)^k \\ &= e^a \frac{1 - (e^b)^{n+1}}{1 - e^b} \text{ si } e^b \neq 1 \text{ i.e. si } b \neq 0 \\ &= e^a \frac{e^{(n+1)b} - 1}{e^b - 1} = e^a \frac{e^{\frac{(n+1)b}{2}} \left( e^{\frac{(n+1)b}{2}} - e^{-\frac{(n+1)b}{2}} \right)}{e^{\frac{b}{2}} \left( e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}} \right)} \text{ si } b \neq 0 \\ &= e^a \times e^{\frac{nb}{2}} \frac{2 \operatorname{sh} \left( \frac{(n+1)b}{2} \right)}{2 \operatorname{sh} \left( \frac{b}{2} \right)} = e^{a + \frac{nb}{2}} \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{(n+1)b}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{b}{2} \right)} \text{ si } b \neq 0 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 C - S &= \sum_{k=0}^n (\operatorname{ch}(a + kb) - \operatorname{sh}(a + kb)) = \sum_{k=0}^n e^{-a-kb} = \sum_{k=0}^n e^{-a} e^{-kb} = e^{-a} \sum_{k=0}^n (e^{-b})^k \\
 &\text{on remplace donc } a \text{ par } -a \text{ et } b \text{ par } -b \\
 &= e^{-a} \times e^{-\frac{nb}{2}} \frac{2 \operatorname{sh}\left(-\frac{(n+1)b}{2}\right)}{2 \operatorname{sh}\left(-\frac{b}{2}\right)} \underset{\text{sh impaire}}{=} e^{-a-\frac{nb}{2}} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \text{ si } b \neq 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $b \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned}
 \frac{(C+S) + (C-S)}{2} &= C = \left( \frac{e^{a+\frac{nb}{2}} + e^{-a-\frac{nb}{2}}}{2} \right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)} = \operatorname{ch}\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \\
 \frac{(C+S) - (C-S)}{2} &= S = \left( \frac{e^{a+\frac{nb}{2}} - e^{-a-\frac{nb}{2}}}{2} \right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)} = \operatorname{sh}\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Et si  $b = 0$ ,  $C = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a) = (n+1) \operatorname{ch} a$  et  $S = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a) = (n+1) \operatorname{sh} a$ . ■

**Exercice 24** Montrer que  $\forall x \neq 0$ ,  $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$ .

En déduire la valeur de la somme  $S_n = \operatorname{th} x + 2 \operatorname{th} 2x + 4 \operatorname{th} 4x + \dots + 2^{n-1} \operatorname{th} 2^{n-1} x$

**Solution.** On a  $\operatorname{th} x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$  et  $\operatorname{th} 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$ . Posons  $u = e^{2x} \neq 1$  si  $x \neq 0$ , alors  $e^{-2x} = \frac{1}{u}$ , ainsi

$$\begin{aligned}
 \operatorname{th} x + \frac{1}{\operatorname{th} x} &= \frac{u-1}{u+1} + \frac{u+1}{u-1} = \frac{(u-1)^2 + (u+1)^2}{u^2-1} = \frac{2(u^2+1)}{u^2-1} \\
 \operatorname{th} 2x &= \frac{u-\frac{1}{u}}{u+\frac{1}{u}} = \frac{u^2-1}{u^2+1} \implies \frac{2}{\operatorname{th} 2x} = \frac{2(u^2+1)}{u^2-1}
 \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que  $\forall x \neq 0$ ,  $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$ . On a ainsi

$$\begin{aligned}
 S_n &= \operatorname{th} x + 2 \operatorname{th} 2x + 4 \operatorname{th} 4x + \dots + 2^{n-1} \operatorname{th} 2^{n-1} x \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \times \left( \frac{2}{\operatorname{th} 2^{k+1} x} - \frac{1}{\operatorname{th} 2^k x} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{\operatorname{th} 2^{k+1} x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{\operatorname{th} 2^k x} \\
 &= \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} + \frac{2^2}{\operatorname{th}(2^2 x)} + \frac{2^3}{\operatorname{th}(2^3 x)} + \dots + \frac{2^{n-1}}{\operatorname{th}(2^{n-1} x)} + \frac{2^n}{\operatorname{th}(2^n x)} \\
 &\quad - \frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{2^2}{\operatorname{th}(2^2 x)} + \frac{2^3}{\operatorname{th}(2^3 x)} - \dots - \frac{2^{n-1}}{\operatorname{th}(2^{n-1} x)} \\
 &= \frac{2^n}{\operatorname{th}(2^n x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}
 \end{aligned}$$

■

**Exercice 25** Discuter l'équation  $e^x(k+x) = e^{-x}(k-x)$  d'inconnue  $x$  et de paramètre  $k$ .

**Solution.** On a

$$e^x(k+x) = e^{-x}(k-x) \iff k(e^x - e^{-x}) = -x(e^x + e^{-x}) \iff 2k \operatorname{sh} x = -x \operatorname{ch} x$$

Puisque  $2 \operatorname{sh} x = 0 \iff x = 0$  et que  $x = 0$  est solution évidente pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , on a

$$e^x(k+x) = e^{-x}(k-x) \iff k = -x \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ ou } x = 0$$

Il reste à savoir si la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = -x \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$  prend la valeur  $k$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Cette fonction est paire, on l'étudie donc sur  $I = ]0, +\infty[$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  et

$$\forall x \in I, f'(x) = -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - x \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} + \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{x}{\operatorname{sh} x} - \operatorname{ch} x$$

Puisque sur  $I$  on a  $\operatorname{sh} x \geq x \geq 0$  et  $\operatorname{ch} x \geq 1$ , on en déduit que  $\frac{x}{\operatorname{sh} x} \leq 1 \leq \operatorname{ch} x \implies f'(x) \leq 0$  et ainsi  $f$  est décroissante (voir plus loin si on ne veut pas (sait pas) utiliser cette inégalité. Enfin

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

Conclusion, puisque  $f$  est continue, elle réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $]-\infty, -1[$ . Ainsi si  $k \in ]-\infty, -1[$ , l'équation a deux solutions (une strictement positive, l'autre strictement négative), sinon il y a une unique solution qui vaut 0.

**Remarque :** Si on ne veut pas utiliser  $\operatorname{sh} x \geq x \geq 0$ , on écrit que  $\forall x \in I, f'(x) = \frac{x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\varphi(x)}{\operatorname{sh}^2 x}$ . La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $I$  et  $\varphi'(x) = 1 - \operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{ch}^2(x) = -2 \operatorname{sh}^2 x \leq 0$ . Ainsi  $\varphi$  est décroissante et  $\varphi(x) \leq \varphi(0) = 0$ , ce qui prouve que  $f'(x) \leq 0$  sur  $I$ . ■

**Exercice 26** Montrer que si  $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$  alors  $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \tan \frac{y}{2}$ ,  $\operatorname{th} x = \sin y$  et  $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$  (et que vaut  $\operatorname{sh} x$  ?)

**Solution.** On sait que  $\operatorname{th} u = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1}$  donc avec  $u = \frac{x}{2}$ , on obtient

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{1 + \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Or  $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$  donc  $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan a - 1}{\tan a + 1}$ , d'où  $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{y}{2}$ .

Puis

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = \frac{\tan^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\tan^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1} = \cos^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \times \left(\tan^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = \left(\sin^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= -\cos\left(2 \times \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin y \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{(e^x)^2 + 1}{e^x} = \frac{\tan^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{2 \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin\left(2 \times \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1}{\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos y} \end{aligned}$$

pour finir  $\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \times \operatorname{th} x = \tan y$ . ■

**Exercice 27** Simplifier la fonction  $\arg \operatorname{th} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

**Solution.** Soit  $f(x) = \arg \operatorname{th} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ , on détermine le domaine de définition de  $f$ . On pose, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  alors

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{1 + x^2} < 1 \\ u &= \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = -1 + \frac{2x^2}{1 + x^2} \geq -1 \text{ et } u = 1 \iff x = 0 \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}^*$ . Sur son domaine de définition,  $f$  est continue et dérivable et  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Sur l'intervalle  $I_1 = ]0, +\infty[$   $f$  est continue, dérivable de dérivée égale à  $\frac{1}{x}$  donc

$$f(x) = \ln x + C_1$$

or  $f(1) = 0$  d'où  $C_1 = 0$ .

Sur l'intervalle  $I_2 = ]-\infty, 0[$   $f$  est continue, dérivable de dérivée égale à  $\frac{1}{x}$  donc

$$f(x) = \ln|x| + C_2$$

or  $f(-1) = 0$  d'où  $C_2 = 0$ .

En conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \ln|x|$$

■

**Exercice 28** Montrer que  $\forall (x, y) \in ]-1, 1[^2$ ,  $\arg \operatorname{th}(x) + \arg \operatorname{th} y = \arg \operatorname{th} \frac{x+y}{1+xy}$  (justifier que  $\frac{x+y}{1+xy} \in ]-1, 1[$  si  $x$  et  $y$  sont dans  $]-1, 1[$ )

**Solution.** Soit  $y \in ]-1, 1[$  fixé, on pose  $f(x) = \arg \operatorname{th}(x) + \arg \operatorname{th} y - \arg \operatorname{th} \frac{x+y}{1+xy}$ . Cette fonction est-elle définie sur  $]-1, 1[$  ? Il suffit de prouver que  $\frac{x+y}{1+xy} \in ]-1, 1[$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .

On pose alors  $\varphi(x) = \frac{x+y}{1+xy}$ , on a  $\varphi'(x) = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} \geq 0$ , ainsi

$$-1 \leq x \leq 1 \implies \varphi(-1) = -1 < \varphi(x) < 1$$

**Remarque :** on peut aussi procéder ainsi : si  $(x, y) \in ]-1, 1[$  alors  $1+xy > 0$ . Ainsi

$$\begin{aligned} -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1 &\iff -1 - xy < x+y < 1+xy \\ &\iff \begin{cases} 0 < 1+xy - x - y \\ \text{et} \\ 0 < x+y + 1+xy \\ 0 < (1-y)(1-x) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \text{et} \\ 0 < (1+y)(1+y) \end{cases} \end{aligned}$$

les deux dernières conditions sont vérifiées dès que  $(x, y) \in ]-1, 1[$ .

En résumé la fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $]-1, 1[$ . Or sur cet intervalle

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} - \frac{\varphi'(x)}{1-\varphi^2(x)} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}}{1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1-x^2} - \frac{1-y^2}{(1+xy)^2 - (x+y)^2} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1-y^2}{(1+xy-x-y)(1+xy+x+y)} \\ &= \frac{1}{1-x^2} - \frac{1-y^2}{(1-y)(1-x)(1+y)(1+y)} = 0 \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc constante égale à  $f(0) = 0$ . ■

## Exercice 29

1. Existe-t-il une fonction  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(\operatorname{ch} x) = e^x$

**Solution.** Non, soit  $f$  une telle fonction alors  $f(\operatorname{ch} 1) = e$  et  $f(\operatorname{ch}(-1)) = \frac{1}{e}$ , mais  $\operatorname{ch}(-1) = \operatorname{ch} 1$  donc  $e = \frac{1}{e}$  ! ■

2. Existe-t-il une fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \operatorname{ch} x$

**Solution.** Oui, puisque  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$ , prendre  $f(u) = \frac{u^2 + 1}{2u}$ . ■

**Exercice 30** Calculer  $\operatorname{th}(\ln \sqrt{a})$  et puis  $\int_{\ln \sqrt{3}}^{\ln \sqrt{2}} \frac{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^3 t \operatorname{sh} t} dt$  en posant  $u = \operatorname{th} t$

## 3 Les olympiques

**Exercice 31 (Timisoara Mathematics Review)** Résoudre le système

$$\begin{cases} \ln(2xy) = \ln(x) \ln(y) \\ \ln(yz) = \ln(y) \ln(z) \\ \ln(2zx) = \ln(z) \ln(x) \end{cases}$$

**Solution.** Les trois réels  $x, y, z$  sont, compte tenu de l'énoncé, des réels positifs. La première équation peut alors s'écrire (pour mémoire  $\ln ab = \ln a + \ln b$  uniquement si  $a$  et  $b$  sont positifs)

$$\ln(2xy) = \ln 2 + \ln x + \ln y = \ln x \ln y$$

soit

$$\ln 2 + \ln x + \ln y + 1 = \ln x \ln y + 1$$

ce qui donne

$$1 + \ln 2 = \ln(2e) = \ln x \ln y + 1 - \ln x - \ln y = (\ln x - 1)(\ln y - 1)$$

On procède de même avec les autres équations, le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} \ln(2e) = (1 - \ln x)(1 - \ln y) & (1) \\ 1 = (1 - \ln y)(1 - \ln z) & (2) \\ \ln(2e) = (1 - \ln z)(1 - \ln x) & (3) \end{cases} \xLeftrightarrow_{(3)-(1)} \begin{cases} \ln(2e) = (1 - \ln x)(1 - \ln y) & (1) \\ 1 = (1 - \ln y)(1 - \ln z) & (2) \\ 0 = (\ln y - \ln z)(1 - \ln x) & (3) \end{cases}$$

D'après la première équation, on ne peut avoir  $1 - \ln x = 0$ , donc  $\ln y = \ln z$ , et ainsi le système devient

$$\begin{cases} \ln(2e) = (1 - \ln x)(1 - \ln y) & (1) \\ 1 = (1 - \ln y)^2 & (2) \end{cases} \xLeftrightarrow_{(3)-(1)}$$

Premier cas  $1 - \ln y = 1 \iff y = 1$  et (1) donne  $1 - \ln x = \ln 2e \iff x = \frac{1}{2}$

Second cas  $1 - \ln y = -1 \iff y = e^2$  et (2) donne  $1 - \ln x = -\ln 2e \iff x = 2e^2$ .

Pour résumé, il y a deux solutions

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^2 \\ e^2 \\ e^2 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

■

**Exercice 32 (Crux Mathematicorum)** Montrer que pour  $x > 0$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{th} x < \sqrt{1-e^{-x^2}}$$

**Solution.** Pour l'inégalité de gauche, si  $x > 0$ , on a  $0 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$  et puisque la fonction  $\operatorname{arg th}$  est une bijection strictement croissante, cela revient à prouver que

$$\operatorname{arg th} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) < x \iff \operatorname{arg th} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) - x < 0$$

Posons  $f(x) = \operatorname{arg th} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) - x$  est bien définie sur  $[0, +\infty[$  et dérivable. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 - \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2} \times \left( \frac{\sqrt{1+x^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \right) - 1 \\ &= (1+x^2) \times \left( \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0 \text{ si } x > 0 \\ \text{car } 1+x^2 > 1 &\implies \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \text{ pour } x > 0 \end{aligned}$$

On a donc  $f$  strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$  (car  $f'(0) = 0$ ), donc puisque  $f(0) = 0$ , on en déduit que  $f(x) < 0$  pour  $x > 0$ . Ceci démontre l'inégalité demandée.

Pour l'autre, on procède de même. Pour  $x \geq 0$ , on a  $\sqrt{1-e^{-x^2}}$  est défini car  $0 < e^{-x^2} \leq 1$  et  $0 \leq \sqrt{1-e^{-x^2}} < 1$ , ainsi toujours parce que  $\operatorname{arg th}$  est une bijection strictement croissante, l'inégalité demandée est équivalente à

$$x < \operatorname{arg th} \left( \sqrt{1-e^{-x^2}} \right)$$

On pose  $g(x) = \operatorname{arg th} \left( \sqrt{1-e^{-x^2}} \right) - x$  qui est dérivable sur  $[0, +\infty[$  de dérivée égale à

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1 - \left( \sqrt{1-e^{-x^2}} \right)^2} \times \frac{-(-2xe^{-x^2})}{2\sqrt{1-e^{-x^2}}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} - 1 \\ &= \frac{x - \sqrt{1-e^{-x^2}}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \end{aligned}$$

Or on connaît l'inégalité classique  $e^u > 1+u$  pour  $u > 0$  (qui est équivalente à  $\ln(1+u) < u$ ). Donc

$$e^{-x^2} > 1 - x^2 \implies 1 - e^{-x^2} < x^2 \implies x - \sqrt{1-e^{-x^2}} > x - \sqrt{x^2} = 0$$

Conclusion, on a bien  $g$  strictement croissante et avec  $g(0) = 0$ , c'est gagné. ■

**Exercice 33 (Olympiades du Viet Nam 1999)** Résoudre le système

$$\begin{cases} (1+4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x) = 0 \end{cases}$$

**Solution.** On pose  $t = 2x - y$ , alors  $(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1}$  s'écrit

$$(1+4^t)5^{1-t} = 1+2^{t+1} \iff \frac{1+4^t}{5^t} = \frac{1+2^{t+1}}{5}$$

Si on pose  $f(t) = \frac{1+4^t}{5^t} = \left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t$  et  $g(t) = \frac{1+2^{t+1}}{5}$ , alors  $f$  est décroissante et  $g(t)$  est croissante. On en déduit que  $g - f$  est strictement croissante, puisque  $f(1) = g(1)$ , il existe une unique solution  $t = 1$ .

On a donc prouvé que  $2x - y = 1$ , on remplace dans la seconde équation pour obtenir

$$y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$$

La fonction  $h(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$  est strictement croissante. En effet  $h'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2+y+1} = 3y^2 + \frac{2y^2+4y+3}{y^2+y+1} > 0$  car  $2y^2 + 4y + 3 = 0$  n'a pas de solution réelle. Puisque  $h(-1) = 0$   $y = -1$  et  $x = 0$  est l'unique solution du système. ■