1 Les basiques

Exercice 1 *Résoudre:*
(1) $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$, (2) $\arcsin(x) = 2\arctan(x)$
(3) $\arcsin 2x - \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin x$, (4) $\arccos x + \arcsin\left(x^2 - x + 1\right) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2 *Résoudre l'équation* $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 3 *Montrer que* $\arctan\left(2\sqrt{2}\right) + 2\arctan\left(\sqrt{2}\right) = \pi$

Exercice 4 *Simplifier les expressions suivantes. On précisera le domaine de validité du résultat. On pourra, soit effectuer un calcul direct, soit dériver la fonction (après avoir justifié sur quel intervalle la dérivée existe).*

1. $\tan(2\arctan x)$
2. $2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \arctan x$
3. $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ *retrouver une formule due à Machin :* $\arctan\left(\frac{5}{12}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$
4. $\arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \arctan(x)$
5. $\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Exercice 5 *Prouver les égalités :*

1. $2\arctan(\operatorname{th} x) = \arctan(\operatorname{sh} 2x)$
2. $\arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = \arctan(\operatorname{sh} x)$ *pour* $x \geq 0$ *et* $\arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = -\arctan(\operatorname{sh} x)$ *pour* $x \leq 0$
3. $\arctan(\operatorname{sh} x) = 2\arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 6 *Résoudre*

$$(E) : \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 7 *Résoudre* $\arctan(x) + \arctan\left(x^3\right) = \dfrac{3\pi}{4}$

2 Les techniques

Exercice 8 *On se propose de trouver les réels* x *tels que*

$$2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition* D_f *de la fonction* f *définie par* $f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1)$
2. *Soit* $x \in D_f$ *, on pose* $\theta = \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$.
Justifier que θ *est bien défini et préciser*
3. *quel intervalle il appartient, exprimer* x *en fonction d'une des lignes trigonométriques de* θ.
4. *Exprimer* $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ *et* $2x-1$ *en fonction de* θ *et conclure*
5. *Retrouver les résultats en utilisant la dérivée de* f.

Exercice 9 *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(x+1) - \arctan x = \arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$. *En déduire la nature de la suite* $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$

Exercice 10 *On définit la suite de Fibonacci* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par*

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ \text{et}\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

1. *Montrer l'identité de Cassini :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$$

2. *En déduire que*
$$\forall n \geq 1,\ \arctan\left(\frac{1}{f_{2n}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{f_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{f_{2n+2}}\right)$$
Quel identités particulières obtient-t-on pour les premiers termes.

3. *On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par*
$$\begin{aligned}\forall n &\geq 0,\ u_n = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \cdots + \arctan\left(\frac{1}{f_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{f_{2n+2}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{1}{f_{2n+2}}\right) + \sum_{i=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{f_{2i+1}}\right)\end{aligned}$$
Calculer u_0 *et montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante.*
Ceci permet d'écrire que
$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{f_{2n+1}}\right)$$

Exercice 11 *Soient* a *et* b *deux réels positifs tels que* $b > 2a$. *On définit la fonction* f *par*

$$f(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x+a}{b}} + \arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b}}$$

1. *Résoudre l'inéquation* $\sqrt{\dfrac{x+a}{b}} < 1$
2. *Déterminer le domaine de définition de* f.
3. *Etudier la monotonie (Pour étudier la monotonie, il existe d'autres méthodes que la dérivation) de* f *et en déduire que l'équation* $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ *admet une unique solution* $x_{a,b}$.
4. *Soient* α *et* β *deux réels tels que* $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, *justifier que* $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$.
5. *En déduire* $x_{a,b}$. *Que remarquez-vous ?*