# 1 Les basiques

**Exercice 1** *Montrer la formule du double produit vectoriel*

$$\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{b}\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}\right) - \overrightarrow{c}\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)$$

*en déduire que*

$$\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \wedge \overrightarrow{c} + \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) \wedge \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}\right) \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$$

**Exercice 2** *Résoudre* $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{v}$ *où* $A, B, \overrightarrow{v}$ *sont donnés.*

**Exercice 3** *Montrer que (on pourra utiliser la formule du double produit vectoriel)*

1.
$$\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} \end{vmatrix}$$

2.
$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \wedge \left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}\right) &= \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right)\overrightarrow{b} - \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right)\overrightarrow{a} \\ &= \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\right)\overrightarrow{c} - \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{d} \end{aligned}$$

**Exercice 4** *Soit* $P$ *d'équation* $x + 2y - 3z = 5$ *et* $A = (1, 1, 1)$ *. Trouver l'équation du plan* $P'$ *tel que* $P' // P$ *et* $A \in P'$.

**Exercice 5** *Soit* $D$ *d'équation* $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$*, donner l'équation de* $P$ *passant par* $A = (1, 0, 2)$ *et contenant* $D$.

**Exercice 6** *Soit* $P$ *d'équation* $x + y + z = 1$*,* $D$ *passant par* $A$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}$ *où* $A = (1, 2, 1)$ *et* $\vec{u} = (2, 1, -2)$*. Soit* $B = (1, 1, 1)$ *trouver un système d'équations de la droite* $\Delta$ *définie par* $B \in \Delta$*,* $\Delta // P$ *et* $\Delta \cap D \neq \emptyset$*. Déterminer alors* $\Delta \cap D$.

**Exercice 7** *Soit* $P$ *défini par* $A = (1, 1, 1)$*,* $\vec{u} = (2, 1, 0)$ *et* $\vec{v} = (1, 0, 1)$*, et* $D$ *définie par* $B = (0, 1, -1)$ *et* $\vec{w} = (1, 1, -1)$*. Montrer que* $D // P$ *et trouver une équation du plan* $P'$ *tel que* $P' // P$ *et* $D \subset P'$.

**Exercice 8** *On considère les points* $A = (1, 2, 3)$ *,* $B = (2, -1, 2)$ *et* $C = (0, 1, -2)$*, les droites* $D_1 : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ *,* $D_2 : \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = -2\mu \\ z = 3 + 5\mu \end{cases}$ *et les plans* $P_1 : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda + \mu \\ z = 4 - \lambda - 2\mu \end{cases}$ *,* $P_2 : 2x - y + 3z - 1 = 0$ *et* $P_3 : x + 2z - 4 = 0$

1. *Donner une équation cartésienne de* $P_1$.
2. *Déterminer une représentation paramétrique de* $P_2 \cap P_3$.
3. *Donner une équation cartésienne du plan contenant les trois points* $A, B$ *et* $C$.
4. *Déterminer l'intersection de* $D_1$ *et* $P_2$.
5. *Donner une équation cartésienne du plan* $Q$ *contenant* $D_1$ *et tel que* $D_2$ *soit parallèle à* $Q$.
6. *Déterminer* $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.
7. *Déterminer l'intersection de* $P_2$ *et de la droite* $(AB)$.
8. *Donner une représentation paramétrique de la droite passant par* $A$*, parallèle à* $P_2$ *et coupant* $D_1$.
9. *Donner une équation cartésienne du plan passant par* $C$ *et contenant* $D_1$

10. *Donner une représentation paramétrique de la droite (si elle existe) passant par $A$ et sécante avec les deux droites $D_1$ et $D_2$*

**Exercice 9** *Montrer que les droites* $D : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-2t \\ z = -3-3t \end{cases}$ *et* $D' : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 2+2t \\ z = -5-t \end{cases}$ *sont concourantes et donner une équation cartésienne du plans les contenant.*

**Exercice 10** *Soit $P_m$ d'équation $2mx+(m+1)y-3(m-1)z+2m+4=0$, justifier qu'il s'agit toujours d'un plan. Montrer que ces plans passent par une droite fixe. Quels sont ceux qui passent par $A : (1,-1,2)$ ?*

**Exercice 11** *Dans $\mathbb{R}^3$, calculer la distance de $M=(1,2,3)$ à la droite* $(\Delta) : \begin{cases} 2x-y+2z-3=0 \\ x+y-4z+3=0 \end{cases}$

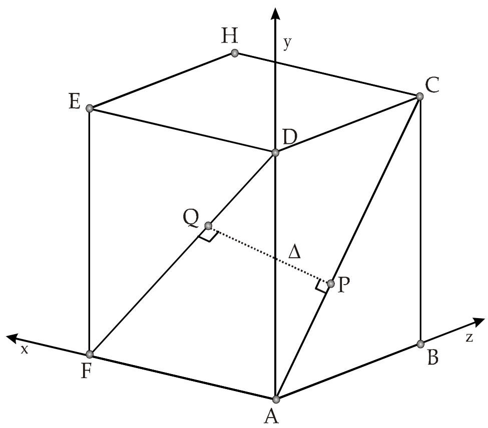
**Exercice 12** *Dans $\mathbb{R}^3$, soit* $(D) : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3+t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1. *Calculer la distance $f(t)$ de $O$ au point $M(t)$ de paramètre $t$ de $(D)$.*
   *Déterminer la valeur de $t$ pour laquelle cette distance est minimale, en déduire les coordonnées de $H$, projection orthogonale de $O$ sur $(D)$. Que vaut la distance de $O$ à $(D)$?*

2. *Montrer que le plan $(P) : x-2z=1$ contient $(D)$. Déterminer une équation cartésienne du plan $(P')$ contenant $(D)$ et faisant un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec $(P)$ ( $(P)$ et $(P')$ sont dits perpendiculaires).*

3. *Calculer la distance de $O$ à $(P)$ et $(P')$. Retrouver la distance de $O$ à $(D)$.*

**Exercice 13** *On considère un cube (c.f. figure ci dessous)*




*On de propose de déterminer la perpendiculaire commune $\Delta$ des droites $(AC)$ et $(DF)$. On se place dans le repère d'origine $A$ d'axes indiqués par la figure. On note a la longueur de l'arête du cube. Soient $P$ et $Q$ les points d'intersection de $\Delta$ et de $(AC)$ et $(DF)$ respectivement, on définit u et v tels que*

$$\overrightarrow{AP} = u\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{DQ} = v\overrightarrow{DF}$$

1. *Déterminer u et v, en déduire les coordonnées de $P$ et $Q$.*

2. *Soient $I$ le point d'intersection des droites $(DP)$ et $(AB)$, $J$ le point d'intersection des droites $(AQ)$ et $(ED)$. Déterminer les coordonnées de $I$ et $J$ et donner une construction simple de $\Delta$.*

**Exercice 14** *Donner un système d'équations de la perpendiculaire commune à $D$ passant par $A=(2,3,-1)$ dirigée par $\overrightarrow{v}=(-1,6,2)$ et à $\Delta$ passant par $B=(1,1,-2)$ et dirigée par $\overrightarrow{w}=(2,1,-4)$.*

**Exercice 15** *Dans $\mathbb{R}^3$, soit $(P) : 2x+2y-z-1=0$, $A=(1,1,-1)$, $B=(1,0,2)$, $\overrightarrow{u}=(1,1,1)$ et $\Delta = B+\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.*

1. *Calculer $d(A,P)$ et $d(A,\Delta)$.*

2. *Donner l'expression de la projection orthogonale sur $P$, déterminer la projection de $\Delta$ sur $P$.*

3. *Quel est l'angle entre $P$ et $\Delta$ ?*

**Exercice 16** *Calculer les déterminants suivants:*
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Exercice 17** *Calculer les déterminants suivants:*
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2b & b-c-a & 2b \\ a-b-c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix}$$

**Exercice 18** *Résoudre à l'aide des formules de Cramer les systèmes suivants :*

1. $$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+y-2z=1 \\ x+4y+z=1 \end{cases}, \begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+y+4z=2 \\ 5x-4y+6z=-1 \end{cases}, \begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases}, \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+(2-a)z=b-1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ mx-m^2y+mz=2m \\ mx+y-m^2z=1-m \end{cases}, \begin{cases} (a-b-c)x+2ay+2az=a \\ 2bx+(b-c-a)y+2bz=b \\ 2cx+2cy+(c-a-b)z=c \end{cases}$$

# 2 Les Techniques

**Exercice 19** *Soit $D$ passant par $A$ et dirigée par $\vec{u}$, $D'$passant par $B$ et dirigée par $\vec{v}$ deux droites.Justifier que $D$ et $D'$ sont coplanaires si et seulement si* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.
*Si $D : \begin{cases} x-2z=3 \\ y=z+2 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} 2x+y+az=5 \\ 2x+az=6+a \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$, justifier que $D'$ est bien définie, déterminer les deux valeurs de $a_1$ et $a_2$ pour que $D$ et $D'$ soient coplanaires. Montrer que dans ce cas elles sont sécantes, on notera $A_1$ (resp $A_2$ ) le point d'intersection correspondant à la valeur $a_1$ (resp $a_2$ ). Pour chaque valeur trouvée donner une équation du plan contenant $D$ et $D'$. En déduire un système d'équations cartésiennes de la droite $(A_1A_2)$.*

**Exercice 20** *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on définit les points $A=(1,1,1)$, $B=(a,1,a)$ et $C=(b,-b,1-b)$ et les vecteurs $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,a,0)$ et $\vec{w}=(0,1,1)$. On considère le plan $\mathcal{P}_1$ contenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ et passant par $A$, $\mathcal{P}_2$ contenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par $B$, et $\mathcal{P}_3$ contenant les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et passant par $C$.*

1. *Déterminer une équation de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$*

2. *Déterminer suivant la valeur des paramètres $a$ et $b$, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.*

**Exercice 21** *On considère trois plans $P_1, P_2$ et $Q$ parallèles entre eux et distincts. Soient trois points $L, M, N$ non alignés du plan $Q$ et $\Omega$ un point n'appartenant à aucun des trois plans. On définit les droites $D_1=(\Omega L)$, $D_2=(\Omega M)$ et $D_3=(\Omega N)$. Justifier que $D_1$, $D_2$ et $D_3$ coupent les plans $P_1$ et $P_2$ en des points que l'on notera $A,B,C$ et $A',B',C'$. ($A=P_1\cap D_1$ et $A'=P_2\cap D_1$ etc..). On définit alors lorsqu'ils existent $I=(BC')\cap(B'C)$, $J=(AC')\cap(A'C)$ et $K=(AB')\cap(A'B)$. A quelles conditions ces points existent-ils. Dans ce cas, montrer que les droites $(LI)$, $(MJ)$ et $(NK)$ sont parallèles ou concourantes.*

**Exercice 22** *Déterminer l'équation de la droite symétrique orthogonale de l'axe $Oz$ par rapport au plan d'équation $x+2y+3z$.*

**Exercice 23** *Calculer* $\begin{vmatrix} 1 & b+c & (1+b^2)(1+c^2) \\ 1 & a+c & (1+a^2)(1+c^2) \\ 1 & a+b & (1+a^2)(1+b^2) \end{vmatrix}$ *puis* $\begin{vmatrix} a & b+c & (1+b^2)(1+c^2) \\ b & a+c & (1+a^2)(1+c^2) \\ c & a+b & (1+a^2)(1+b^2) \end{vmatrix}$

**Exercice 24** *Calculer* $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (c+b)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (a+c)^2 \end{vmatrix}$

**Exercice 25** *Résoudre le système* $\begin{cases} x+y+mz=-1 \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=m \end{cases}$ *, où $m \in \mathbb{C}$.*