PCSI2 - Programme de khôlle : semaine 16 (18 au 23 Janvier 2010)

Chapitre 15 : Groupes-anneaux-corps

Lois de composition interne sur un ensemble. Associativité, commutativité, neutre, unicité du neutre. Eléments inversibles (ou symétrisables), pour une loi associative, unicité de l'inverse. Groupe, définition d'un groupe, d'un groupe abélien. Calcul dans un groupe ($a * x = b \Longleftrightarrow x = a^{-1} * b$, $x * a = b \Longleftrightarrow x = b * a^{-1}$), les éléments sont réguliers (i.e. $a * x = b * x \Longrightarrow a = b$ et $x * a = x * b \Longrightarrow a = b$). Inverse de $a * b$. Sous-groupe, définition et caractérisation. Morphisme de groupe. Définition, iso, endo, auto-morphisme, composition de morphismes. Définition du noyau. Le noyau est un sous-groupe. Le morphisme est injectif si et seulement si son noyau est réduit au neutre du groupe de départ.

Chapitre 16 : Suites réelles :

Vocabulaire sur les suites rélles (suites majorées, bornées, croissantes$\cdots$). Définition de la convergence d'une suite vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Unicité de la limite d'une suite. Suite extraite d'une suite réelle. Si $(u_n)_n$ converge alors toute suite extraite converge $(*)$ Si les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers le même réel l, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers la même limite $(*)$. (exemple d'utilisation avec une suite $u_{n+1} = f(u_n)$).Suite convergeant vers 0. Si $0 \leq |u_n| \leq \varepsilon_n$ et si $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $(*)$. Propriétés algébriques (somme, produit, quotient). Théorèmes liés à l'ordre. Passage à la limite dans une inégalité entre deux suites convergentes $(*)$. Théorème d'encadrement. Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes $(*)$.

Les énoncés suivis de $(*)$ peuvent être posés en question de cours. J'ai traité quelques exemples de suites "$u_{n+1} = f(u_n)$".
Exercices types :

- ► L'ensemble $G =]-1, 1[$ muni de la loi $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ est un groupe.abélien.
- ► Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(kx)$.
- ► Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, quelle est la nature de $(u_n)_n$?
- ► Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ sont adjacentes.

On note ℓ la limite commune, montrer que $1 - 2\sqrt{2} \leq \ell \leq -1$. Comment suffit-il de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de la limite commune à 10^{-2} près ?

► Montrer que pour tout $n \geq 0$, l'équation $x^n + x^2 = 1$ admet une unique solution x_n positive. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.

Au-dessous du réel — Patapon, mascotte du 20e bataillon de Force d'Inertie

Plonk et Replonk