PCSI2 - Programme de khôlle : semaine 18 (Première semaine de Février 2010)

Chapitre 17 : Espaces Vectoriels :

Définition d'un $\mathbb{K}-$ev. Espaces vectoriels de référence ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n, \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathcal{F}(X,E), \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ u_n \in \mathbb{R}\right\}, \mathbb{K}[X]$). Régles de calcul. Espace vectoriel produit. Sous-espace vectoriel. Intersection de sous espaces vectoriels $(*)$. Sous espace engendré par une famille de vecteurs $(*)$ (c'est le plus petit contenant la famille, conséquence pour montrer l'inclusion de $\mathrm{Vect}(x_1,\cdots,x_n)$ dans le sous-espace vectoriel F, il suffit de montrer que $\forall i,\ x_i \in F$). Exemple de mise "sous forme de Vect" dans le cas de $\mathbb{R}^3$, exemple avec les suites récurrentes d'ordre 2, les équations différentielles, quelques exemples avec les polynômes. Somme de deux sous-espaces vectoriels $(*)$, exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (exemple avec une droite vectorielle et un hyperplan par analyse-synthèse). $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G. Si $F = \mathrm{Vect}\left((x_i)_{1\le i\le n}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((y_j)_{1\le j\le p}\right)$ alors $F+G = \mathrm{Vect}\left((x_i)_{1\le i\le n} \cup (y_j)_{1\le j\le p}\right)$. Dans le cas de $\mathbb{R}^3$ j'ai montré comment exploiter le déterminant après avoir mis les ssev sous forme de vect. Somme directe, sous-espaces vectoriels supplémentaires. Caractérisation de $E = F\oplus G$ (décomposition existe toujours et est unique). Applications linéaires : définition d'une application linéaire entre deux K-ev. Exemples usuels. Propriétés ($f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_E,\quad f(-\overrightarrow{x}) = -f(\overrightarrow{x})$). $\mathcal{L}(E,F)$ est un K-ev. Isomorphisme, f^{-1} est linéaire $(*)$. Définition de $GL(E)$. Noyau et Image, ce sont des sous-espaces vectoriels $(*)$. Composition d'applications linéaires, calculs dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, en particulier la formule du binôme si $f\circ g = g\circ f$.
Définition des projections p et q associées à la décomposition $E = F\oplus G$. Propriétés (elles sont linéaires, $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p\circ q = q\circ p = 0$, $\ker p = \mathrm{Im}\, q = F$, $p\in F \Longleftrightarrow p(x) = x$). Projecteurs, si f est un projecteur, alors $\ker f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$ et f est la projection sur $\mathrm{Im}\, f$ de direction $\ker f$. Symétries, caractérisation par $f^2 = Id_E$. Exemples de calculs de projections (dans $\mathbb{R}^3$ ou plus compliqués).

Les énoncés suivis de $(*)$ peuvent être posés en question de cours.

Exercices types :

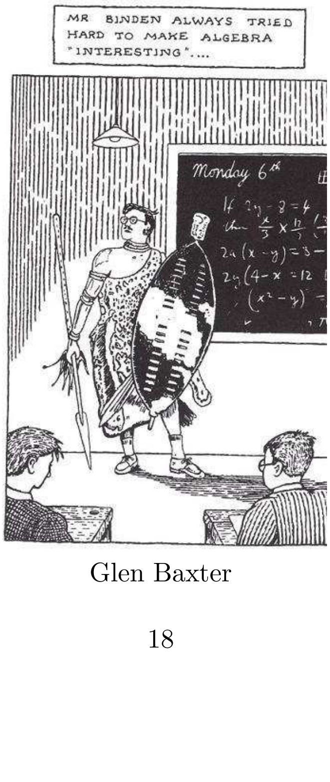
▶ Soit $E = \mathbb{R}^3[X]$ et $F = \left\{P\in E,\ P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une famille génératrice.

▶ Soit $F = \left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n\right\}$ et $G = \left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n\right\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel des suites réelles. Montrer que si $u\in F\cap G$, alors u est constante. Que dire de $F+G$?

▶ Soit E un $\mathbb{K}$ ev,et $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$, montrer que: $g\circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f)\subset\ker(g)$.

▶ E désigne ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E vérifiant l'égalité : $f^2 - 2f - 3I = 0$, où $f^2 = f\circ f$ et I désigne l'application identité de E ($I = \mathrm{Id}_E$). On note g et h les éléments de $\mathcal{L}(E)$ définie par $g = f - 3I$ et $h = f + I$. Déterminer $g\circ h$ et $h\circ g$. Montrer que $\ker g\oplus\ker h = E$.

▶ Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y-z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(2,-1,0)$. On admet que $E = F\oplus G$. Déterminer l'expression de la projection sur F parallélement à G.



Glen Baxter