

PCSI2 - Programme de kholle : semaine 2 (du 22 au 27 septembre)

Chapitre 0 : Calcul Intégral

Intégration (On admet que si f est continue sur I alors elle admet des primitives ce qui permet de définir l'intégrale entre deux bornes).

Ainsi seules les fonctions continues sont intégrables (je demande aux élèves de vérifier que la fonction est bien définie et de préciser qu'elle est continue sur l'intervalle d'intégration. La notion de continuité sera revue plus tard).

Rappel des propriétés de $\int_a^b f(t) dt$. Intégration par parties (les fonctions doivent être \mathcal{C}^1) exemple d'utilisation pour le calcul d'intégrale ou pour obtenir des relations de récurrence.

Changement de variables dans une intégrale sur un segment (le changement de variable doit être donné, aucune règle n'a été communiquée aux élèves). Les élèves doivent vérifier que le changement de variable est bien de classe \mathcal{C}^1 . Pas de technicité sur le changement de variable, l'objectif est de savoir effectuer un changement de variable.

Chapitre 1 : Nombres complexes.

"Définitions des complexes", conjugaison, parties réelles et imaginaires, module, argument (révision du cours de Terminale). Inégalité triangulaire (démontrée ainsi que le cas d'égalité), généralisation à n complexes. Affixe d'un point et d'un vecteur. Interprétation du module et de l'argument en termes de distance et d'angle. Interprétation de $z + z'$ (translaté de $M(z)$ par $\vec{v}(z')$ ou affixe de $\vec{w}(z) + \vec{v}(z')$). condition d'alignement et de perpendicularité. Forme polaire ou trigonométrique. Application à la trigonométrie. Formule d'Euler et De Moivre et application (linéarisation et développement). Racines énièmes d'un complexe donné sous forme polaire. Racines deuxièmes sous forme cartésienne. Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes. Transformations usuelles du plan complexe. Expression complexe des translations, homothéties et rotations. Définition des similitudes directes, expression complexe.

Exercices type

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, donner une relation de récurrence pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ pour $n \geq 0$.

Calculer $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{8}} \frac{1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x} dx$ en posant $u = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, quel est le signe du résultat obtenu, pourquoi ?

Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \sin t$, retrouver ce résultat par une interprétation géométrique en termes d'aires.

Montrer que $(|z| = 1 \text{ et } z \neq 1) \Rightarrow i \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\forall z$ tel que $|z| \neq 1$, on a $\left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$

Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $N(z^2)$ et $P\left(\frac{1}{z}\right)$ soient alignés.

Pour $n \geq 1$, soient $(\omega_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ les racines énièmes de l'unité ($\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$), calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$ et $\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$
Résoudre, dans \mathbb{C} , $(z-1)^n = (z+1)^n$ où $n \geq 2$.

Calculer les racines deuxièmes de $1+i$ sous forme algébrique et polaire, en déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$