

Chapitre 21 : Théorie de la dimension

Rang d'un système de vecteurs. Définition (rg=dim de l'espace engendré). Le rang est majoré par dim E et le cardinal de la famille.. Rang d'une famille libre. Propriétés (Le rang ne dépend pas de l'ordre des vecteurs, si un vecteurs est combinaison linéaire des autres on peut le supprimer, on ne change pas le rang si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres). Méthode de calcul du rang (via le pivot sur les colonnes).

Application linéaire en dimension finie : L'image d'une base définit une application linéaire. Théorème et formule du rang., rang d'une application linéaire. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Chapitre 22 : Intégration et calcul de primitives

Définition d'une subdivision, des fonctions en escalier, continue par morceaux, de l'intégrale (sur poly). Propriétés de l'intégrale (linéarité, croissance, positivité, additivité, majoration de la valeur absolue...). Exemple d'étude de suites définies par une intégrale.

Cas des fonctions positives : Si f est continue, positive d'intégrale nulle sur $[a, b]$ alors f est nulle. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Intégrale fonction de sa borne du haut. Théorème fondamental : dérivation de $\int_a^x f(t) dt$ si f est continue sur I

et $a \in I$. Dérivation de $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$. Formule de Taylor avec reste intégral.

► Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 2x + y + 2z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$. Donner une famille génératrice de $\text{Im } f$, en déduire $\text{rg}(f)$, $\text{Im}(f)$, $\ker f$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f \oplus \ker f$.

► Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $E = \ker f + \text{Im } f$
- (2) $\text{Im } f = \text{Im } f^2$
- (3) $\ker f = \ker f^2$
- (4) $E = \ker f \oplus \text{Im } f$

► Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finis et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Montrer que $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ puis que $|\text{rg } f - \text{rg } g| \leq \text{rg } f + \text{rg } g$.

► Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. On pose $m = \inf_{[0,1]} f$ et $M = \sup_{[0,1]} f$ (justifier l'existence

de m et M). Que dire de la fonction $g = (M - f)(f - m)$? En déduire l'inégalité $\int_0^1 f^2 \leq -mM$, puis que f s'annule au moins une fois.

► On définit pour $n \geq 1$, $u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{n+x} dx$. Donner la limite, puis un équivalent de u_n .

► Soit $F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan t}{t} dt$, quel est le domaine de définition de F ? Calculer $F'(x)$ et en déduire F .