PCSI2 - Programme de kholle : semaine 3 (du 28 Septembre au 2 Octobre)
Chapitre 1 : Nombres complexes.

Forme polaire ou trigonométrique. Application à la trigonométrie. Formule d'Euler et De Moivre et application (linéarisation et développement). Racines énièmes d'un complexe donné sous forme polaire. Racines deuxièmes sous forme cartesienne. Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes. Transformations usuelles du plan complexe. Expression complexe des translations, homothéties et rotations. Définition des similitudes directes, expression complexe.

Chapitre 2 : Géométrie élémentaire du plan :

Repère cartésien, base du plan (deux vecteurs non colinéaires), coordonnées d'un point, d'un vecteur. Formule de changement de repère (si on connaît les coordonnées de la nouvelle origine et des nouveaux vecteurs dans l'ancien repère). Changement de repère orthonormé direct. Coordonnées polaires d'un point, équations polaires des droites ne passant pas par le pôle et des cercles passant par le pôle.Produit scalaire : définition : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$. Calcul du projeté d'un point M sur une droite D dont on connaît un point et un vecteur directeur (formule $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right) \vec{u}$. où $A \in \mathcal{D}$ et $\vec{u}$ dirige $\mathcal{D}$ et P est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$). Propriétés du produit scalaire : symétrie, bilinéarité, calcul en base orthonormée. Déterminant en base orthonormée directe (il est défini par le sinus), interprétation en termes d'aire, propriétés (antisymétrie, bilinéarité). Expression en BOND. Application à l'alignement et à la colinéarité des vecteurs. Formules de Cramer pour les systèmes à deux équations et deux inconnues dont le déterminant est non nul (un système 2–2 a une unique solution si et seulement s'il est de Cramer. S'il n'est pas de Cramer alors il admet soit aucune solution, soit une infinité). Droites en géométrie plane : représentation cartésienne et paramétrique. Distance d'un point à une droite (formule $d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ où $A \in \mathcal{D}$, $\vec{n}$ normal à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c$ en RON.. Cercles, équation cartésienne, cercle de diamètre $[A, B]$, intersection cercle-droite. Tangente en un point, équation (règle du dédoublement). Intersection de deux cercles (en fonction de la distance entre les centres).

Exercices types

- Résoudre, dans $\mathbb{C}$, $(z-1)^n = (z+1)^n$ où $n \geq 2$.
- On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit X l'ensemble des point $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $x^2 + 3xy + y^2 - x + y = 1$. Soit $\mathcal{R}$ le repère orthonormé direct d'origine $\Omega : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de premier vecteur $\overrightarrow{e_1}$ tel que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{e_1}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donner l'équation de X dans $\mathcal{R}$, décrire l'ensemble X.
- Soit $\mathcal{H}$ la courbe représentative de la fonction $y = \dfrac{1}{x}$ en repère orthonormal, soient A, B et C trois points deux à deux distincts de $\mathcal{H}$, montrer que l'orthocentre du triangle (ABC) est encore sur $\mathcal{H}$.
- Reconnaître les graphes des courbes d'équation polaires

$$1)\ r = \frac{5}{4\cos\theta + 3\sin\theta} \qquad 2)\ r = 2\cos\theta - 3\sin\theta$$

- Résoudre le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rrl} x & +2(m-1)\,y & = 2 \\ (m-1)\,x & +(m+2)\,y & = 3 \end{array} \right.$$

- A tout nombre réel m, on associe l'ensemble $\mathcal{C}_m$ des points M du plan dont les coordonnées vérifient

$$x^2 + y^2 - 4mx - 2my + 10(m-1) = 0$$

Démontrer que, quelque soit m, $\mathcal{C}_m$ est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon R_m. Démontrer qu'il existe deux points A et B,dont on déterminera les coordonnées, communs à tous les cercles $\mathcal{C}_m$.

Prévision pour la semaine prochaine : Toutes les fonctions usuelles.