PCSI2 - Programme de kholle : semaine 30:

**Chapitre 25 :** Espaces euclidiens

Définition d'une forme biliniéaire. Forme symétrique, positivité. Forme définie positive. Produits scalaires. Exemples usuels. Orthogonalité, définition de vecteurs orthogonaux. Définition de $F^{\perp}$. Familles orthogonales (Elle est libre si aucun des vecteurs n'est nul). Espaces euclidiens (dim finie + muni d'un produit scalaire). Existence de bases orthonormales. Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Supplémentaire orthogonal. Dimension de $F^{\perp}$. Expression du produit scalaire, de la norme et des coordonnées en base orthonormée.Expression des formes linéaires sur un espace euclidien ($\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est de la forme $\overrightarrow{u} \longrightarrow (\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{a})$ où $\overrightarrow{a} \in E$ est unique). Projection orthogonale. Expression de la projection orthogonale (J'ai fait quelques exos de recherche de l'orthogonal d'un hyperplan et de projection sur l'hyperplan via son orthogonal et le lien avec la distance).

**Chapitre 26 :** Fonctions de deux variables

Définition des ouverts de $\mathbb{R}^2$ (pour la norme euclidienne usuelle). Une boule ouverte est ouverte, un demi plan ouvert est ouvert (démontrés). Applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Applications partielles. Limites en un point. Applications continues. Opérations sur les limites, fonctions de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}^2$ (via les applications composantes). Composition. Exemples de méthodes pour montrer la continuité et la non-continuité (pour la continuité, passage en polaire, pour la non-continuité, utilisation des applications partielles ou de chemins particuliers).

- ▶ Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, si $P = \sum_{i=0}^{3} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{3} b_i X^i$, on définit le produit scalaire $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$. Soit $H = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$, Donner une base de $H$. Déterminer $H^{\perp}$ et donner la projection orthogonale de $X^3$ sur $H$, en déduire la distance de $X^3$ à $H$.
- ▶ Soit $E$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2,\ x \perp y = 0 \Longrightarrow f(x) \perp f(y)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de $E$, on pose $f_i = f(e_i)$, calculer $(f_i + f_j \mid f_i - f_j)$ pour $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}$. En décuire qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|$.
- ▶ Etudier la continuité de $f$ et $g$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{|x| + |y|} \text{ et } f(0,0) = 0,\ g(x,y) = \frac{xy^6}{x^6 + y^8} \text{ et } g(0,0) = 0 \text{ (Utiliser } g(t^p, t^q)\text{ )}$$

- ▶ Soit $f$ définie par $f(x, y) = \dfrac{xy}{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y}$. Quel est son domaine de définition ? Déterminer les limites en 0 de $f(x, x)$ et de $f\left(x, -x + x^2\right)$. Conclusion ? On rappelle que $\forall (a, h) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{sh}(a + h) + \operatorname{sh}(-a) = 2\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2}\right)\operatorname{ch}\left(a + \frac{h}{2}\right)$. Soit $a \neq 0$, déterminer $\lim_{h \to 0^+} f(a + h, -a)$, conclusion ?