PCSI2 - Programme de kholle : semaine 5 (du 13 Octobre au 19 Octobre)

**Chapitre 3** : Fonctions usuelles
Trigonométrie hyperbolique réciproque : $\operatorname{arg\,sh}$, $\operatorname{arg\,ch}$, $\operatorname{arg\,th}$. Propriétés, dérivées (l'expression logarithmique de ces fonctions est un des exos type).Fonctions trigonométriques réciproques : arcsin, arccos, arctan . Graphes, variations, dérivée de ces fonctions. Relations $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{|x|} \times \frac{\pi}{2}$. Exemple de simplification de fonction en dérivant (j'ai fait quelques exos types où f est $\mathcal{C}^0$ sur un intervalle, dérivable sauf en certains points, la dérivée est simple, et on en déduit l'expression de $f \cdots$).

**Chapitre 4** : Géométrie dans l'espace.
Repères cartésiens, orthonormaux. Produit scalaire (rappel rapide des propiétés), expression en BON. Produit vectoriel dans l'espace orienté (défini par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\, \overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ normal unitaire oriente le plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$). Propriétés, condition de colinéarité, expression en BOND (pour le calcul, je passe par le moyen mnémotechnique $\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & x & x' \\ \overrightarrow{j} & y & y' \\ \overrightarrow{k} & z & z' \end{vmatrix}$. qui permet d'assimiler le développement par rapport à une colonne du déterminant) Produit mixte ou déterminant en BOND ($[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$). Propriétés (dont invariance par permutation circulaire). Caractérisation des bases. Expression en BOND du produit mixte. Définition du déterminant d'ordre 3. Propriétés des lignes et des colonnes. Développement par rapport à une colonne ou une ligne. Exemple de calculs de déterminant d'ordre 3 (les khôlleurs peuvent poser des calculs de déterminants, Pour les déterminants, je n'ai pas parlé de la règle de Sarrus que je préfèré éviter pour l'instant). Formules de Cramer, résolution de système $3 \times 3$ par les formules de Cramer.
Eléments de géométrie analytique : représentation paramétrique d'une droite, système d'équations cartésiennes. Plan dans l'espace, équation d'un plan défini par un point et deux vecteurs, par trois points, ou par un point et un vecteur normal. Distance d'un point à une droite, d'un point à un plan.
Rem : Je n'ai pas encore fait beaucoup d'exercices sur la fin du programme de kholle. Prévisions : Fonctions équivalents, début des DL.

**Exercices type**

▶ Calculer, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

▶ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arg\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $\forall x \geq 1$, $\operatorname{arg\,ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $\forall x \in \left]-1+1\right[$, $\operatorname{arg\,th} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

▶ Résoudre $\arctan(x) + \arctan\left(x^3\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

▶ Soit $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs de l'espace avec $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, résoudre l'équation $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ d'inconnue $\overrightarrow{x}$. . Rappel donné: la formule du double produit vectoriel :
$\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\, \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}\right) \overrightarrow{c}$

▶ Calculer $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

▶ Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, soit $D$ d'équations $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$, donner l'équation de $P$ passant par $A = (1, 0, 2)$ et contenant $D$.