L'ALGORITHME DE PRABEKHAR

Qu'est ce qu'un algorithme ?

Un algorithme c'est un procédé mathématique qui consiste à faire subir une opération à un nombre.

Qu'est ce que l'algorithme de Prabekhar ?

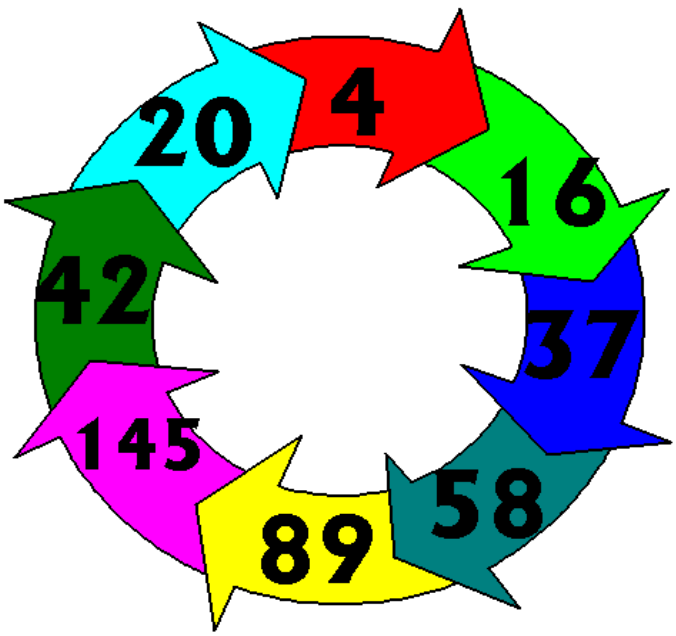
L'algorithme de Prabekhar consiste un faire la somme des carrés des différents chiffres qui composent n'importe quel nombre.

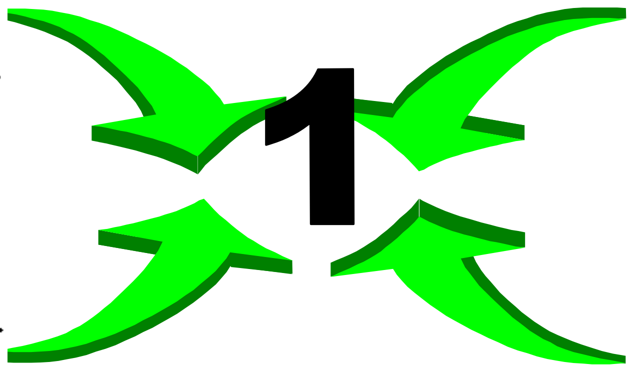
Ex : prenons le nombre 12 et appliquons lui l'algorithme.
12 ➠ $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ ➠ $5^2 = 25$ ➠ $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$ ➠ $2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$ ➠ $8^2 + 5^2 = 89$ ➠ 145 ➠ 42 ➠ 20 ➠ 4 ➠ 16 ➠ 37 ➠ 58 ➠ 89 ➠145…

Ex 2 : maintenant essayons avec 7.
7 ➠ $7^2 = 49$ ➠ $4^2 + 9^2 = 97$ ➠ $9^2 + 7^2 = 130$ ➠ $1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$ ➠ $1^2 = 1$ ➠ $1^2 = 1$ …

On remarque deux phénomènes :

- Un cycle de nombres qui se répètent à l'infini
4 ➠ 16 ➠ 37 ➠ 58 ➠ 89 ➠ 145 ➠ 42 ➠ 20 ➠ 4 …
- Un puits composé du chiffre 1 dans lequel une fois rentré, on ne peut plus sortir(car $1^2 = 1$…)





Voici ce qu'est venu nous dire un chercheur de la faculté de maths de Lille début octobre.

Début de nos recherches…à l'assaut de la conjecture.

A partir de là, notre mission sera de prouver qu'en faisant la somme des carrés des différents chiffres qui composent n'importe quel nombre, le résultat tombera forcément dans le cycle ou dans le puits.

On a exactement six mois (top chrono !) pour atteindre notre objectif avant d'aller l'exposer au congrès Math.En.Jeans à Paris.

Pour commencer, on a appliqué l'algorithme au **chiffres de 1 à 9**.
Par chance tous ces chiffres sont tombés soit dans le puits soit dans le cycle.

Ensuite, on a essayé les nombres a deux chiffres (**10 à 99**), ce qui nous a pris un peu de temps car les calculer tous à la main un à un c'est long ! Cette dure épreuve passée on a pu voir que tous ces nombres là ont marché aussi =) !

Dernière étape de nos recherches le prouver pour les nombres à trois chiffres (**100 à 999**). C'est là que ça se corse! L'écart entre 100 et 999 est trop important pour les faire à la main un à un surtout pour des feignasses comme nous.

Réfléchissons : le plus grand nombre à trois chiffres est 999 qui donne par Prabekhar $9^2+9^2+9^2$ soit 3 x 81 soit 243. Donc si on veut prouver que les nombres à trois chiffres après plusieurs étapes de l'algorithme tombent soit dans le puits de 1 soit dans le cycle il nous suffit juste de calculer les nombres compris entre 100 et 243. Mais l'écart est encore trop important pour nous (et oui on est des grosses feignasses !) Pour nous aider on a donc fait appelle à notre cher calculatrice qui a fait le bulot à notre place. Il a juste suffit qu'on lui rentre le programme suivant :

```
: prompt N
: Lbl 1
: 0 ➟M
: While N>0
: N-int(N/10)*10 ➟C
: M+C² ➟M
: (N-C)/10 ➟N
: End
: M➟N
: Disp N
: If N≠0 and N≠1
: Goto 1
: Stop
```

Et voilà! (5 minutes pour effectuer 143 suites de calculs !! Efficaces les feignasses!)

La démonstration… L'aboutissement de longues heures de travail acharné…

La démo suivante est en somme toute simple, mais on y a quand même passé plus de deux mois !

Prenons un nombre quelconque (car les démonstrations se font toujours avec un nombre quelconque !), appelé N et composé de 4 chiffres : abcd ($a \neq 0$ car sinon abcd est considéré comme un nombre à trois chiffres)
Décomposons ce nombre en :
$a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$
ou encore, en :
$a \times 10 + a \times 990 + b \times 100 + c \times 10 + d$

Or, on sait que $a<10$ car a et un chiffre, donc il est compris entre 1 et 9.
On multiplie par a des deux cotés de l'inéquation, on obtient donc :
$a^2<10 \times a$ (car a positif)
De même, on a :
$b^2 \leq 100 \times b$ (car b peut être égale à 0)
$c^2 \leq 10 \times c$ (car c peut être égale à 0)
et $a \times 990>81 \geq d^2$ donc $a \times 990>d^2$
Et $d \geq 0$

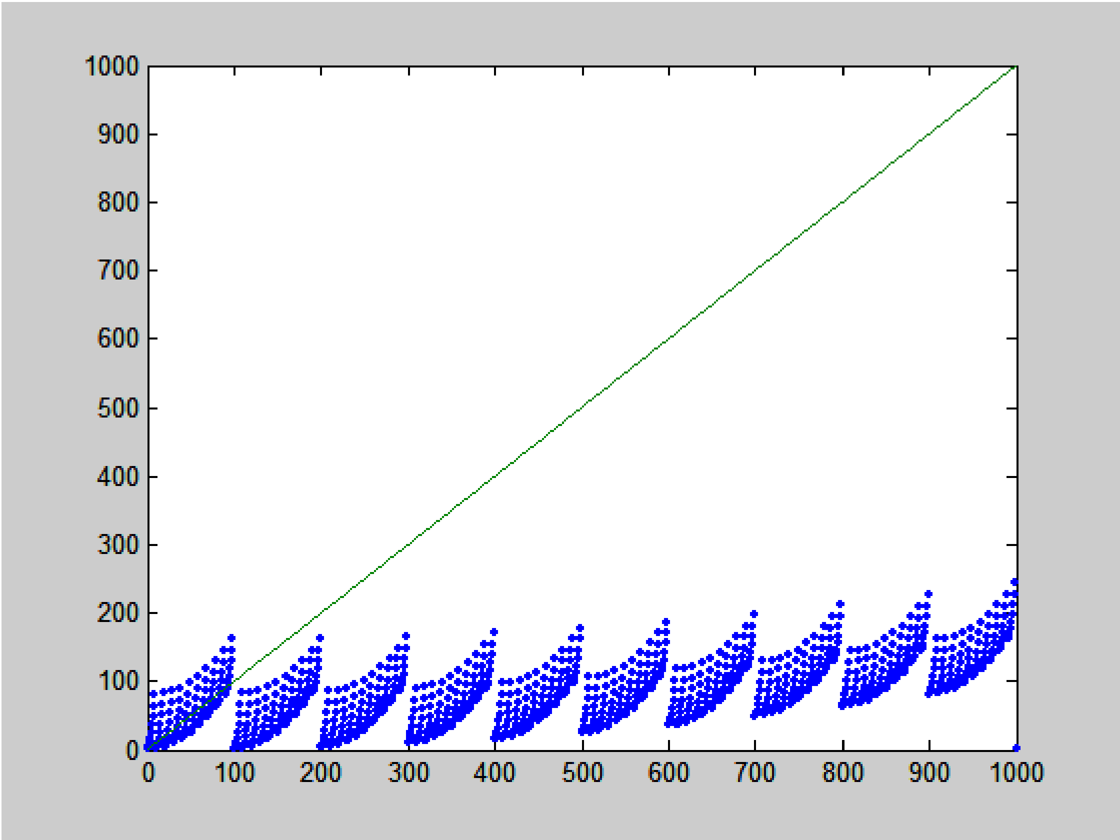
En résumé on obtient donc :
$a^2<10 \times a$
$b^2 \leq 100 \times b$
$c^2 \leq 10 \times c$
$d^2<a \times 990$
$0 \leq d$
Ce qui nous donne : $\mathbf{a^2+b^2+c^2+d^2< N}$

Donc, pour ceux qui ont suivis, cela veut dire que la somme des carrés des chiffres qui composent un nombre (ici N) est plus petite que le nombre de départ.
Donc, si on prend un nombre, le résultat obtenu après une étape de l'algorithme sera un nombre inférieur et donc déjà vérifié.

Exemple illustratif (pour les pommés) :

1
.
.
.
999 est vérifié (nombre à trois chiffres)
1000 (le résultat après une étape de l'algorithme sera plus petit que le nombre de départ, donc plus petit que 1000 et tombera donc sur un nombre déjà vérifié)

Voici une courbe faite sur Mathlab (pour ceux qui connaissent).



Explications (reformulée d'une autre manière pour les gens qui n'ont toujours pas compris) :
Les points représente le résultat d'une ombre (du nombre haha) en abscisse.
La droite (le trait vert au milieu) est la droite d'équation y=x
On voit bien qu'après une étape de l'algorithme, pour les nombres supérieur à 100, le résultat est situé en dessous de la courbe y=x.

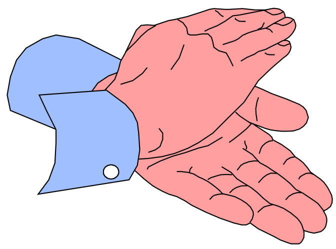
Les chercheurs, le retour !

En Janvier, nos chers chercheurs (difficile à dire) sont revenus, et c'est donc tout naturellement que nous leur avons exposé nos recherches (et la fameuse démo !)
A la fin de notre exposé, les chercheurs cherchant (encore plus difficile à dire) « la p'tite bête » nous demande :
« Mais comment vous faîtes pour les nombres à 5, 6, 7, 8… chiffres ? »
« Eh bien c'est simple ! », avons nous répliqué, « Il suffit de prendre un N tel que N = abcde,f,g,h… et décomposer N comme précédemment, mais en ax9990+ax10… »

A nous Paris !

L'exposé s'est bien passé. En quelques mots Paris c'était : le train, le métro, l'auberge de jeunesse, le resto', le congrès, le stress, le micro, les tableaux, les profs, les chercheurs, les graines de maths, la marche à pied, les blagues (Avec Monsieur G. on est pas sorti de l'auberge mais on y est pas rentré non plus ! ha ha ha…), la tour Eiffel, les canards, un hérisson, des affiches, des photos et pleins de souvenirs …

Merci et Bravo à tous =)



Les élèves :	Les chercheurs :
Loic Monsorez	*M.x*
Laure Decharrière	*M. y*
Julie Deguines	*M. z*