ESM SAINT CYR 1995 math 1

I. Étude de suites

1. On montre par récurrence que c_n est défini, strictement positif pour $n > 1$; puis que λ_n est défini.On a $c_1 = \cos\frac{\pi}{2}$ donc $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
Supposons par récurrence que $c_n = \cos\theta_n$ avec $\theta_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta_n}{2}} = |\cos\frac{\theta_n}{2}|$$

Comme $\frac{\theta_n}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, le cosinus est positif et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
On en déduit par récurrence que $\theta_n = \frac{\pi}{2^n}$.D'autre part, $\lambda_1 = 2$ donc $\alpha_1 = 2$.
Supposons par récurrence que $\lambda_n = \alpha_n \sin\theta_n$ alors:

$$\lambda_{n+1} = \frac{\alpha_n \sin\theta_n}{\cos\theta_{n+1}} = \frac{\alpha_n \sin\theta_n}{\cos\frac{\theta_n}{2}} = 2\alpha_n \sin\frac{\theta_n}{2}$$

D'où $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$ puis, par récurrence, $\alpha_n = 2^n$.On a donc finalement:

$$\boxed{\lambda_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} \quad \text{et} \quad \lim(\lambda_n) = \pi}$$

2. L'inégalité de Taylor-Lagrange avec majoration par la dérivée d'ordre 3 donne:

$$\forall x \in R,\ |\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6} \sup_{t\in[0,x]} |\cos t| \leq \frac{|x|^3}{6}$$

On l'applique à $x = \frac{\pi}{2^n}$ et on multiplie par 2^n pour avoir:

$$\boxed{\forall n \in N^*,\ |\lambda_n - \pi| \leq \frac{\pi^3}{6\cdot 4^n}}$$

Il suffit de prendre $\boxed{N_1 = 12}$ pour avoir: $|\lambda_{N_1} - \pi| \leq 10^{-6}$.

3. Se déduit directement du développement limité du sinus au voisinage de 0.

4. Comme $(\lambda_n) \to \pi$ et $(\lambda_{n+1}) \to \pi$, on a bien: $(\lambda_n^{(1)}) \to \pi$.$\lambda_n - \pi = -\frac{\pi^3}{6\cdot 4^n} + o(4^{-n})$, $\lambda_{n+1} - \pi = -\frac{\pi^3}{6\cdot 4^{n+1}} + o(4^{-n})$ car $o(4^{-n}) = o(4^{-n-1})$.
La combinaison $-\lambda_n + 4\lambda_{n+1}$ élimine les parties principales d'où

$$\boxed{\lambda_n^{(1)} - \pi = o(4^{-n}) = o(\lambda_n - \pi)}$$

Pour avoir un équivalent de $\lambda_n^{(1)} - \pi$, on prend un terme supplémentaire dans le développement limité du 3):

$$\lambda_n^{(1)} - \pi = \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi^5}{5!\,4^{2n}} + \frac{4\pi^5}{5!\,4^{2n+2}}\right) + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

D'où

$$\boxed{\lambda_n^{(1)} - \pi \sim -\frac{\pi^5}{5!\,4^{2n+1}}}$$

5. d'après les calculs précédents, $\lambda_n^{(1)} - \pi = -\frac{\pi^5}{5!\,4^{2n+1}} + o(4^{-n})$ donc
$\lambda_{n+1}^{(1)} - \pi = -\frac{\pi^5}{5!\,4^{2n+3}} + o(4^{-n})$. On cherche une combinaison linéaire pour éliminer les parties principales et on trouve:

$$\boxed{\frac{16\lambda_{n+1}^{(1)} - 15\lambda_n^{(1)}}{15} - \pi = o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \quad \text{c'est à dire } \alpha = -\frac{1}{15}}$$

Remarque: une légère imprécision dans l'énoncé puisque $4^{2n} = 16^n$ *et non* 8^n*.mais la question est juste car* $\frac{1}{16^n} << \frac{1}{8^n}$
Remarque : lisez toujours un sujet de concours en entier . La réponse à cette question vous est donnée au début de la partie V .

6. On trouve: $\underline{\lambda_n^{(2)} = \frac{1}{45}(\lambda_n - 20\lambda_{n+1} + 64\lambda_{n+2})}$.
Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange: $|\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}| \leq \frac{|x|^7}{7!}$, on écrit:
$\lambda_n - \pi = -\frac{\pi^3}{6\cdot 4^n} + \frac{\pi^5}{120\cdot 4^{2n}} + r_n$ avec $|r_n| \leq \frac{\pi^7}{7!\cdot 4^{3n}}$.
On a les formules similaires à l'ordre $n+1$ et $n+2$, puis on utilise l'expression de $\lambda_n^{(2)}$, les termes en π^3 et π^5 s'éliminent et on a:

$$|\lambda_n^{(2)} - \pi| \leq \frac{1}{45}\frac{\pi^7}{7!}\left(\frac{1}{4^{3n}} + \frac{20}{4^{3n+3}} + \frac{64}{4^{3n+6}}\right) = \frac{17\pi^7}{576\cdot 7!}\frac{1}{4^{3n}}$$

On trouve alors que pour $\underline{N_2 = 3}$, $|\lambda_{N_2} - \pi| < 10^{-6}$.

II. Polynômes type Bernoulli

1. F est une primitive de f donc est égale à G à une constante près. La condition $\int_0^1 F(t)\,dt = 0$ définit alors F de façon unique et:

$$\boxed{F(x) = G(x) - \int_0^1 G(t)\,dt}$$

2. Par récurrence sur n, on démontre que B_n est définit de façon unique à partir de B_{n-1} en utilisant 1) et que c'est un polynôme de degré n.
Si $B_n = a_n X^n + \cdots$ alors $B_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} X^{n+1} + \cdots$, on en déduit par récurrence que le terme de plus haut degré de B_n est $\boxed{\frac{X^n}{n!}}$ (c'est la différence avec les polynômes de Bernoulli qui sont unitaires).

$$B_0 = 1, \quad B_1 = X - \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12},$$

$$B_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}, \quad B_4 = \frac{1}{24}(X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30})$$

3. Comme $B'_{n+2} = B_{n+1}$, $\int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0$ s'intègre pour donner $B_{n+2}(0) = B_{n+2}(1)$.
La relation est varie pour tout $n \in N$ donc pour $n \geq 2$, $\boxed{B_n(0) = B_n(1)}$.
Remarque :soignez la rédaction pour justifier le $n \geq 2$

4. On vérifie que $C_0 = 1$ et $C'_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} B'_{n+1}(1-x) \cdot (-1) = (-1)^n B_n(1-x) = C_n(x)$.
Puis par le changement $t \mapsto 1-t$, on trouve $\int_0^1 C_{n+1}(t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$.La suite (C_n) vérifie les conditions du 2) et par unicité $C_n = B_n$ pour tout n.

On a donc $\boxed{\forall n \in N,\ B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)}$
Ce qui s'interprète géométriquement:
si n est pair, le graphe de B_n est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$;
si n est impair, le graphe de B_n est symétrique par rapport au point $(\frac{1}{2}, 0)$.

Si n est impair et $n \geq 3$ on aura pour $x = 1$, $B_n(0) = -B_n(1)$ et compte tenu de 2) cela entraîne $\boxed{B_n(1) = B_n(0) = 0}$.

Maintenant, si on fait $x = \frac{1}{2}$, on en déduit $\boxed{B_n(\frac{1}{2}) = -B_n(\frac{1}{2}) = 0}$.

5. On remarque que $B_1 = X - \frac{1}{2}$ ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$.
Supposons par récurrence que B_{2m-1}, $m \geq 1$ ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$, alors comme $B'_{2m} = B_{2m-1}$, on en déduit que B_{2m} est strictement monotone sur $]0, 1/2[$.
D'autre part, B_{2m+1} s'annule en 0 et $\frac{1}{2}$ donc, par le théorème de Rolle, sa dérivée $B'_{2m+1} = B_{2m}$ s'annule en $c \in]0, 1/2[$, on est alors dans l'un des cas suivants:

x	0		c		$1/2$
B_{2m}		$+$	0	$-$	
B_{2m+1}	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

x	0		c		$1/2$
B_{2m}		$-$	0	$+$	
B_{2m+1}	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Ce qui prouve que B_{2m+1} ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$ et achève la récurrence.
On étudie $h : x \mapsto B_{2m}(x) - B_{2m}(0)$.
La dérivée est B'_{2m-1} qui ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$, donc h est strictement monotone sur $]0, 1/2]$ est comme $h(0) = 0$, h ne s'annule pas sur $]0, 1/2]$;
par la relation $B_{2n}(x) = B_{2n}(1-x)$, on a aussi que h ne s'annule pas sur $[1/2, 1[$ et finalement

$$\boxed{B_{2n}(X) - B_{2n}(0) \text{ a un signeconstant sur } [0,1]}.$$

III. Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

1. On a d'abord pour tout $t \in]0, 1[$, $\quad \sum_{k=0}^N e^{2ik\pi t} = e^{i\pi N t} \frac{\sin(N+1)\pi t}{\sin \pi t}$, puis la partie réelle: $\sum_{k=0}^N \cos(2k\pi t) = \frac{\cos(\pi N t)\sin(N+1)\pi t}{\sin \pi t}$, on multiplie par 2 et on retranche 1:

$$1 + 2\sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t) = \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}$$

car $\quad 2\cos(\pi N t)\sin(N+1)\pi t = \sin(2N+1)\pi t + \sin \pi t$.
Remarque :on peut aussi prendre la partie réelle de $\sum_{k=-N}^N e^{2ik\pi t}$

2. Au voisinage de 0, $B_n(t) - B_n(0) = tB'_n(0) + o(t)$ et $\sin(\pi t) \sim \pi t$ donc

$$\boxed{\boxed{\lim_{t\to 0} \varphi_n(t) = \frac{B'_n(0)}{\pi}}}$$

D'autre part $\varphi_n(1-t) = (-1)^{n+1}\frac{B_n(t)-B_n(1)}{\sin \pi t}$ en utilisant $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$;
puis pour $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$ donc $\varphi_n(1-t) = (-1)^{n+1}\varphi_n(t)$, ce qui ramène l'étude en $t = 1$ au cas $t = 0$ et prouve que φ_n se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ lorsque $n \geq 2$.
C'est encore vrai pour $n = 0$ mais faux dans le cas où $n = 1$ (pas de prolongement en 1).
Supposons $n \geq 2$, pour $t \in]0,1[$, $\varphi'_n(t) = \frac{B'_n(t)\sin \pi t - (B_n(t)-B_n(0))\pi \cos \pi t}{\sin^2 \pi t}$
Le développement limité à l'ordre 2 du numérateur donne l'équivalent $\frac{\pi t^2}{2}B''_n(0)$ et $\boxed{\lim_{t\to 0} \varphi'_n(t) = \frac{1}{2\pi}B''_n(0)}$.
Cela prouve que φ_n est de classe C^1 sur $[0,1[$ puis grâce à la relation $\varphi_n(1-t) = (-1)^{n+1}\varphi_n(t)$, φ_n est de classe C^1 sur $[0,1]$.
remarque 5/2 : On peut écrire :

$$\varphi_n(t) = \frac{\frac{B_n(t)-B_n(0)}{t}}{\frac{\sin(\pi t)}{t}}$$

Le numérateur est un polynôme car $t = 0$ est po^le du numérateur $B_n(t) - B_n(0)$
$\sin(\pi t)$ *est développable en série entière et on peut simplifier par t le développement. Toute fonction dévelopable en série entière est indéfiniment dérivable . φ_n est donc indéfiniment dérivable sur $[0,1[$ comme quotient , à dénominateur non nul de tels fonction . La théorie peut remplacer le calcul.*
3. Pour $x > 0$, on intègre par parties: $\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt = [\frac{\cos xt}{x}f(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos xt}{x}f'(t)\,dt$,
puis on majore le cosinus par 1, f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$ donc bornées, alors quand $x \to +\infty$, $\boxed{\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt \to 0.}$
4. En intégrant deux fois par parties, on trouve $I_{n,k} = \frac{1}{4k^2\pi^2}(B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) - I_{n-2,k})$.
On distingue donc suivant la parité de n en utilisant le fait que $B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) = 0$ sauf pour $n = 2$.
Pour n impair, comme $I_{1,k} = 0$, on trouve $I_{2p+1,k} = 0$.
Pour n pair, on trouve d'abord $I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}(1 - I_{0,k})$ puis suivant que $k = 0$ ou $k > 0$ on obtient

$$I_{2p,0} = 0, \quad I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}} \text{ si } k > 0$$

5. On suppose $m > 0$ puisque $\varphi_0 = 0$.

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin(2N+1)\pi t\,dt = \int_0^1 [B_{2m}(t) - B_{2m}(0)]\frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt$$

$$= \int_0^1 [B_{2m}(t) - B_{2m}(0)]dt + 2\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 [B_{2m}(t) - B_{2m}(0)]\cos 2\pi t\,dt$$

$$= -B_{2m}(0) + 2\sum_{k=1}^{N} I_{2m,k} = -B_{2m}(0) + 2\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{m-1}}{(2k\pi)^{2m}}$$

En utilisant $\int_0^1 B_{2m}(t)\,dt = 0$ et $\int_0^1 \cos(2\pi t)\,dt = 0$. On fait tendre N vers $+\infty$, comme φ_{2m} est de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut utiliser III.2 d'où:
$B_{2m}(0) = 2(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2m}}$ et on en déduit:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}} = 2^{2m-1}\pi^{2m}(-1)^{m-1}B_{2m}(0)}$$

Exemples: on trouve $\frac{\pi^2}{6}$ pour $m = 1$ et $\frac{\pi^4}{90}$ pour $m = 2$.
6. On majore $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}}$ par $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, puis par 2 puisque $\frac{\pi^2}{6} < 2$.
Avec la formule du 5), on en déduit bien $\boxed{|B_{2m}(0) \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}}$.

IV. Formule sommatoire d'Euler

1. On démontre la formule par récurence sur $m \geq 1$.
Pour $m = 1$, on intègre par parties: $\int_0^1 f'''(t)B_3(t)\,dt = [f''(t)B_3(t)]_0^1 - \int_0^1 f''(t)B_2(t)\,dt$

le crochet est nul puisque $B_3(0) = B_3(1) = 0$, on pousuit:

$$-\int_0^1 f''(t)B_2(t)\,dt = -[f'(t)B_2(t)]_0^1 + \int_0^1 f'(t)B_1(t)\,dt$$
$$= \frac{f'(0) - f'(1)}{12} + [f(t)B_1(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)\,dt$$

Ce qui donne finalement la formule à l'ordre $m = 1$.On suppose la formule vraie à l'ordre m et on intègre deux fois par parties:

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)\,dt = [f^{(2m+1)}(t)B_{2m+2}(t)]_0^1 - \int_0^1 f^{(2m+2)}(t)B_{2m+2}(t)\,dt$$
$$= B_{2m+2}(0)[f^{(2m+1)}(1) - f^{(2m+1)}(0)] - [f^{(2m+2)}(t)B_{2m+3}(t)]_0^1 + \int_0^1 f^{(2m+3)}(t)B_{2m+3}(t)\,dt$$

Et comme le crochet est nul, on a la formule à l'ordre $m + 1$.

2. On intègre d'abord par parties:

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)\,dt = [f^{(2m+1)}(t)(B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}(0))]_0^1 - \int_0^1 f^{(2m+2)}(t)(B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}(0))\,dt$$

le crochet est nul et on applique la formule de la moyenne à la dernière intégrale sachant que (II.5) $t \mapsto B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}(0)$ a un signe constant sur $[0, 1]$. Il existe $c \in [0, 1]$ tel que:

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)\,dt = -f^{(2m+1)}(c)\int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}(0))\,dt$$

et comme $\int_0^1 B_{2m+2}(t)\,dt = 0$, on a le résultat.En utilisant la majoration du III.6, on obtient alors:

$$|\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)\,dt| \leq \frac{4}{(4\pi^2)^{m+1}}\,\|f^{(2m+2)}\|$$

3.

$$T(h) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) + \frac{f(1) + f(0)}{2}$$

4.

$$\int_0^1 f_i(t)\,dt = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - \frac{h}{12}(f'(x_{i+1}) - f'(x_i)) + \frac{h^3}{720}(f'''(x_{i+1}) - f'''(x_i)) - \int_0^1 f_i^{(5)}(t)B_5(t)\,dt$$

En posant $u = x_i + ht$, on a: $\int_0^1 f_i(t)\,dt = n\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)\,du$.
On somme pour $i = 0$ à $n - 1$ et on calcule les sommes:

$$n\int_0^1 f(t)\,dt = nT(h) - \frac{h}{12}(f'(1) - f'(0)) + \frac{h^3}{720}(f'''(1) - f'''(0)) + R(h) \tag{1}$$

où $R(h) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^1 f_i^{(5)}(t)B_5(t)\,dt$. On utilise la majoration du 2):
$|R(h)| < \sum_{i=0}^{n-1}\frac{4}{(4\pi^2)^3}\,\|f_i^{(6)}\|$ et comme $f_i^{(6)}(t) = h^6 f^{(6)}(x_i + ht)$, on trouve
$|R(h)| < \frac{4h^5}{(4\pi^2)^3}\,\|f^{(6)}\|$ et en multipliant l'égalité (1) par h:

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\,dt = T(h) - \frac{h^2}{12}[f'(1) - f'(0)] + \frac{h^4}{720}[f'''(1) - f'''(0)] - r(h)}$$

avec $|r(h)| = |hR(h)|$, majoré par $\frac{h^5}{16\pi^6}\,\|f^{(6)}\|$.

V. Accélération de Romberg

1. On a $T_0(h) - \int_0^1 f(t)\,dt = -a_1h^2 - a_2h^4 + r(h)$ donc c'est un $o(h)$.À partir de ce développement, on forme $T_k(h) - \int_0^1 f(t)\,dt$ pour $k = 1$ et $k = 2$ et on vérifie qu'il s'agit de $o(h^{2k+1})$.

2. $T_2(h) = \int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{45}(-r(h) + 20r(\frac{h}{2}) - 64r(\frac{h}{4}))$.Avec la majoration du IV.4), on a alors:

$$T_2(h) - \int_0^1 f(t)\,dt \leq \frac{h^6}{45 \times 16\pi^6}(1 + \frac{20}{2^6} + \frac{64}{4^6})\|f^{(6)}\| = \frac{17h^6}{9216\pi^6}\,\|f^{(6)}\|$$

3. a) $f^{(6)}(t) = \frac{6!}{(1+t)^7}$ d'où $\|f^{(6)}\| = 6! = 720$.

b) En utilisant 2), on trouve qu'il suffit de prendre $n = 12$ pour être sûr que $T_2(h)$ soit une approximation de $\ln 2$ à 10^{-12} près.