Partie I - Question préliminaire

Les deux formules peuvent se démontrer par récurrence.On peut aussi dire:

$$f(x+ka) = F(x+ka) - \lambda F(x+(k+1)a)$$

en remplaçant x par $x+ka$ dans (1) et donc:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k F(x+ka) - \lambda^{k+1} F(x+(k+1)a) = F(x) - \lambda^n F(x+na)$$

En simplifiant 2 à 2 les termes de la formule.

Pour (3) on remplace x par $x-ka$ dans (1): $F(x-ka) - \lambda F(x-(k-1)a) = f(x-ka)$ et donc:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} F(x-ka) - \lambda^{-(k-1)} F(x-(k-1)a) = \lambda^{-n} F(x-na) - F(x)$$

Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1

On a un sous espace vetoriel de $\mathcal{F}$:

$\mathcal{L}$ est un sous ensemble de $\mathcal{F}$ non-vide (contient, par exemple, les fonctions constantes), stable par combinaison linéaire:Si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq K_f |x-y| \text{ et } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |g(x) - g(y)| \leq K_g |x-y|$$

alors pour tout couple (a,b) de réels on a:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |(af+bg)(x) - (af+bg)(y)| \leq (|a|K_f + |b|K_g)|x-y|$$

$af+bg$ est donc lipschitzienne de rapport $aK_f + bK_g$

II.2

Soit f une fonction dérivable de $\mathcal{F}$. Si f' est bornée, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq K_f |x-y|$$

où K_f est un majorant de $\{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$. Donc $f \in \mathcal{L}$.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}$,

$$\forall (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y,\ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq K_f$$

et, par passage à la limite dans l'inégalité, $|f'(x)| \leq K_f$. Donc f' est bornée.

II.3

Soit f et g deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$ et M et N des majorants respectifs de $|f|$ et de $|g|$.

$$\forall (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)|$$

$$\leq M|g(x) - g(y)| + N|f(x) - f(y)| \leq (MK_g + NK_f)|x-y|,$$

donc fg appartient à $\mathcal{L}$. Si l'une des deux n'est pas bornée, la propriété n'est pas vraie, comme le montre l'exemple $f : x \longmapsto x$, $g : x \longmapsto \sin x$. La fonction fg est dérivable, à dérivée non bornée.

II.4

Soit $f \in \mathcal{L}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq |f(0)| + K_f |x|$.

II.5

Soit $f \in \mathcal{F}$ et M un réel positif tel que, pour tous x et y réels vérifiant $0 \leq x-y \leq 1$, on a $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$. Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$, par exemple $x \geq y$, et $n = \mathrm{E}[x-y]$. Alors $f(x)-f(y) = \sum_{k=0}^{n-1}[f(x-k)-f(x-k-1)] + f(x-n) - f(y)$. Donc $|f(x)-f(y)| \leq M(n+x-n-y)$, et $|f(x)-f(y)| \leq M(x-y)$. Donc $f \in \mathcal{L}$.

Partie III - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A.1

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda|^n|f(x+na)| \leq |\lambda|^n(A|x+na|+B) \leq (A|x|+B)|\lambda|^n + A|a|n|\lambda|^n$. Comme les séries de termes généraux λ^n et $n\lambda^n$ sont absolument convergentes ($|\lambda|<1$), il en est de même pour la série de terme général $f(x+na)$.

b) Soit F définie par $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$.

$$F(x)-\lambda F(x+a) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{p}\lambda^n f(x+na) - \sum_{n=0}^{p}\lambda^{n+1}f[x+(n+1)a]\right) = \lim_{p\to+\infty}(f(x)-|\lambda|^(p+1)f(x+(p+1)a) = f(x)$$

Le deuxième terme tend vers zéro comme terme général d'une série convergente.Donc F vérifie (1). Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|F(x)-F(y)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|^n[f(x+na)-f(y+na)]\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|^n|f(x+na)-f(y+na)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|^n K_f|x-y| = \frac{K_f}{1-|\lambda|}|x-y|.$$

Donc $|F(x)-F(y)| \leq \dfrac{K_f}{1-|\lambda|}\ |x-y|$. Donc $F \in \mathcal{L}$.

Soit G une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1), $G-F$ est une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $(G-F)(x) = \lambda(G-F)(x+a)$.Et donc par récurrence $(G-F)(x) = \lambda^n(G-F)(x+na)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $|(G-F)(x)| \leq |\lambda|^n\,(A|x+na|+B)$. Le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 comme terme général d'une série convergente. donc $G-F$ est nulle. F est l'unique fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

III.A.2

a) $f_1(x) = 1$ est 0-lipschitzienne.et d'après le calcul précédent $F(x)$ est constant et égal à la somme de la série géométrique de raport λ. $F_1(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}$

b et c) les fonctions f_2 et f_3 sont dérivable et de dérivée majorée en valeur absolue par 1.Elles sont donc 1-lipschitzienne. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n\exp\left(i(x+na)\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{1-\lambda\mathrm{e}^{ia}} = \dfrac{\mathrm{e}^{ix}-\lambda\mathrm{e}^{i(x-a)}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$ en multipliant par la quantité conjuguée.

F_2 et F_3 sont les parties réelle et imaginaire de la somme qui vient d'être calculée.

$$F_2(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2} \quad , \quad F_3(x) = \frac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ .$$

remarque:On peut vérifier aussi que F_2 donnée par le sujet convient puis utiliser $\sin(x) = -\cos(x+\pi/2)$ pour deviner F_3 et le vérifier. L'unicité assurant que la solution devinée est la bonne

III.B.1

a et b) En remplaçant λ par $1/\lambda$ et a par $-a$ dans III.A.1.a et b), on a un calcul symétrique pour $|\lambda|>1$ en partant de (3) et $F(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k}f(x-ka)$. *à rédiger sur la copie*

III.B.2

a) $F_1(x) = -\dfrac{\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-1}} = \dfrac{1}{1-\lambda}$.

b et c) $-\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{-n}\exp\left(i(x-na)\right) = -\dfrac{\lambda^{-1}\mathrm{e}^{i(x-a)}}{1-\lambda^{-1}\mathrm{e}^{-ia}} = -\dfrac{\lambda\mathrm{e}^{i(x-a)}-\mathrm{e}^{ix}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$.

F_2 et F_3 ont la même expression qu'en III.A.1.b et c).

Partie IV - Étude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.A.1

Soit $F \in \mathcal{L}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) - F(x+a) = f(x)$, d'où $|f(x)| \leq K_F|a|$. f est donc bornée.

IV.A.2

a) Si $f = 0$, les fonctions lipschitziennes de période a conviennent, par exemple $x \longmapsto \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$.

b) Donc, si $F \in \mathcal{L}$ vérifie (1), la fonction $x \longmapsto F(x) + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ est une autre fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.A.3

a) En faisant tendre λ vers 1 dans (5), on obtient l'expression

$$F(x) = \frac{\cos x - \cos(x-a)}{2(1-\cos a)} \ (\cos a \neq 1)$$

Cette fonction F est lipschitzienne ($\mathcal{L}$ est un espace vectoriel) et vérifie $F(x) - F(x+a) = \cos x$ pour tout x (passage à la limite quand λ tend vers 1 dans $F_2(x) - \lambda F_2(x+a) = \cos(x)$ ou calcul direct par trigonométrie).

b) $a = 2\pi$. Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). D'après le préliminaire:

$F(x) = F(x + 2n\pi) + n\cos x$. Donc $F((2n+1)\pi) = F(\pi) + n$ et $F(2n\pi) = F(0) - n$, on obtient, pour tout n, $F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) = 2n + F(\pi) - F(0)$, ce qui contredit l'hypothèse $F \in \mathcal{L}$ car si F est lipschitzienne alors $F((2n+1)\pi) - F(2n\pi)$ est majoré par $K_F\pi$ et ne peut pas diverger vers l'infinie. Il n'y a donc aucune fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

remarque le choix de x et y est assez arbitraire il faut prendre deux suites x_n et y_n de limite infinie et ayant des cos *différents*

IV.B.1

a) La fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ est une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) + F(x+a) = 0$.

b) Si $F \in \mathcal{L}$ vérifie (1), la fonction $x \longmapsto F(x) + \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ est une autre fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B.2

a) En faisant tendre λ vers -1 dans (5), on obtient l'expression

$$F(x) = \frac{\cos x + \cos(x-a)}{2(1+\cos a)} \ (\cos a \neq -1)$$

. Cette fonction F est lipschitzienne ($\mathcal{L}$ est un espace vectoriel) et vérifie $F(x) + F(x+a) = \cos x$ pour tout x (passage à la limite quand λ tend vers -1 ou calcul direct).

b) $a = \pi$. Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). D'après le préliminaire: $F(x) = (-1)^n F(x+n\pi) + n\cos x$. Donc $F((2n+1)\pi) = F(\pi) + 2n$ et $F(2n\pi) = F(0) - 2n$, on obtient, pout tout n, $F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) = 4n + F(\pi) - F(0)$, ce qui contredit l'hypothèse $F \in \mathcal{L}$. Il n'y a donc aucune fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B.3

a) La série de terme général $(-1)^n f(x+n)$ est une série vérifiant les hypothèses du théorème sur les séries alternée (f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et f décroissante de limite nulle en $+\infty$), donc elle est convergente.

b) Soit F sa somme.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[f(x+n) + f(x+n+1)\right] = f(x),$$

(même passage à la limite qu'au IIIA1B) donc F vérifie (1).

$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x+n)\right| \leq f(x)$, d'après la majoration du reste dans le théorème des séries alternées, donc $|F(x)| \leq f(x)$. Or f a une limite nulle en $+\infty$, donc F aussi.

Soit $(x\,,\,y)\in\mathbb{R}^2$, tels que $0\le x-y\le 1$,

$$F(y)-F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[f(y+n)-f(x+n)\right],$$
$$0\le (y-x)f'(x+n)\le f(y+n)-f(x+n)\le (y-x)f'(x+n-1)0$$

(d'après le théorème des accroissements finis et la croissance de f'). L'inégalité de droite étant exclue pour $n=0$.

Donc $F(x)-F(y)$ est la somme d'une série vérifiant le théorème des séries alternées. Il en résulte que $|F(x)-F(y)|\le (x-y)|f'(0)|$, après majoration de la valeur absolue de la somme de la série alternée par celle de son premier terme. Donc, d'après II.5), $F\in\mathcal{L}$.

Soit $G\in\mathcal{L}$ vérifiant (1) et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$. La fonction $H=G-F$ est une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ H(x+1)=-H(x)$ et donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ H(x)=(-1)^nH(x+n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}H(x+n)=0$. Donc H est la fonction nulle, et F est unique.