

# Corrigé Mines-Ponts 2001

## Math I

### PRELIMINAIRES

a) On prend un élément du noyau de  $f^k$  et on vérifie sans problème qu'il est dans le noyau de  $f^{k+1}$

$$x \in \ker f^k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in \ker f^{k+1}$$

Donc

$$\boxed{\ker f^k \subset \ker f^{k+1} \text{ pour tout naturel } k}$$

b) Montrons par récurrence  $H_k : \ker f^k = \ker f^{k+1}$ .

- $H_p$  est vraie par hypothèse.
- Si  $H_k$  montrons  $H_{k+1}$  :
  - L'inclusion  $\ker(f^{k+2}) \subset \ker(f^{k+1})$  découle du a)
  - Soit alors  $x \in \ker(f^{k+1})$  on a  $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = 0$  donc  $f(x) \in \ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$  par l'hypothèse de récurrence. Et donc  $f^{k+2}(x) = f^{k+1}(f(x)) = 0$  d'où  $H_{k+1}$
- Ainsi par récurrence,

$$\boxed{\ker f^k = \ker f^{k+1} \text{ pour tout } k > p}$$

$\dim_k = \dim \ker f^k$  est une suite croissante d'entiers naturels.

Par l'absurde si on la suppose strictement croissante alors pour tout  $k, \dim_{k+1} \geq \dim_k + 1$  donc  $\dim_k \geq \dim_0 + k = k$  et  $\lim_{+\infty} (\dim_k) = +\infty$ . Absurde car la suite est majorée par  $n$ .

Donc il existe un rang  $k$  tel que  $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ . Si on prend pour  $p$  le plus petit  $k$  solution:

- $\forall k < p \ker(f^k) \subsetneq \ker(f^{k+1})$  par définition du plus petit
- $\forall k \geq p \ker(f^k) = \ker(f^{k+1}) = \ker(f^p)$ .
- De plus  $p \leq \dim_p \leq n$  donc  $p \leq n$  et donc  $\ker f^n = \ker f^{n+1}$

c) Si  $u^q = 0$  alors  $\ker(u^q) = E$  ce qui impose  $\ker(u^{q+1}) = E$  donc  $q \geq p$  et la suite des noyaux vaut  $E$  pour  $k \geq p$  donc  $\ker(u^n)E$  soit  $\boxed{u^n = 0}$

## PREMIERE PARTIE

Dans le corrigé j'utilise l'expression "endomorphisme induit" comme dans le programme et non "restriction de l'endomorphisme" comme dans le sujet.

1)

1a)  $g$  commute avec  $D_n$  - donc avec  $D_n^{p+1}$  - car  $D_n = g^2 - \lambda Id$  est un polynôme en  $g$ .

Alors  $\ker D_n^{p+1}$  est stable par  $g$  (résultat de cours).

Les polynômes tels que leur dérivé  $(p+1)$ ème soit nul sont les polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  donc  $E_p = \ker D^{p+1}$ .

$E_p$  étant stable par  $D$  et  $g$ , les endomorphismes induits  $g_p$  et  $D_p$  vérifient la même relation.

1b) De même que précédemment puisque  $D$  est un polynôme en  $g$  et  $E_n = \ker D^{n+1}$ .

1c)

i}

•  $F$  est de dimension finie  $(n+1)$ . Soit  $\mathcal{F}$  une base de  $F$ .  $\mathcal{F}$  étant finie on peut poser  $q$  le maximum des degrés des éléments de  $\mathcal{F}$ . Toute élément de la base de  $F$  est dans  $E_q$  donc  $F \subset E_q$ . Dans ce cas  $D^{q+1}F = \{0\}$  donc l'endomorphisme induit de  $D_F$  est nilpotent.

$D_F$  est un endomorphisme nilpotent en dimension  $n+1$  donc  $D_F^{n+1} = 0$  (préliminaire question c)

Alors  $D^{n+1}(F) = \{0\}$  donc  $F$  est inclus dans  $E_n$  et par l'égalité de leur dimension :  $F = E_n$ .

• Soit maintenant  $F$  un sous espace de dimension infinie. Montrons que  $F = E$  en montrant que  $F$  contient tous les  $E_n$ . Soit donc  $n$  fixé.

$F$  n'est pas inclus dans  $E_n$  car sinon  $F$  serait de dimension finie.

donc il existe un polynôme  $P$  dans  $F$  de degré  $m \geq n$ .

Si de plus  $F$  est  $D$ -stable,  $F$  contient  $P, D(P), \dots, D^m(P)$ , famille échelonnée en degrés donc base de  $E_m$ .

. Ainsi  $F$  contient  $E_m$  donc  $E_n$ .

• En conclusion,

$$\boxed{\text{les sous espaces stables par } D \text{ sont } E, \{0\} \text{ et les } E_n}$$

ii} Puisque  $D$  est un polynôme en  $g$ , tout sous espace  $G$  stable par  $g$  est stable par  $D$ .

Réciproquement, si  $G$  est stable par  $D$  alors (c.i)  $G$  est égal à  $E, \{0\}$  ou à  $E_n$  donc  $G$  est stable par  $g$  d'après la question IIa)

2)

2a)  $\dim E_0 = 1$  et  $D_0 = 0$ .

La relation  $g^2 = \lambda Id + D_0$  se traduit matriciellement par  $\gamma^2 = \lambda$  ce qui impose comme on travaille dans les réels que

$$\boxed{\lambda > 0}$$

2b) L'une ou l'autre des existences de  $g$  entraîne (d'après I.1.a) l'existence de  $g_0$  dans les conditions I-2.a) donc  $\lambda \geq 0$ . D'où le résultat par contraposition.

3)

3a)  $f^n \neq 0$  donc il existe  $y$  tel que  $f^n(y) \neq 0$ . Soit alors  $B = (f^n(y), f^{n-1}(y), \dots, y)$

- la famille a le bon cardinal  $\text{card}(B) = n + 1 = \dim(E)$
- la famille est libre :
  - soit  $a_n f^n(y) + \dots + a_0 y = 0$  alors en composant par  $f^n$  et compte tenu de  $f^p = 0$  pour  $p > n$ , il vient  $a_0 f^n(y) = 0$ . Comme  $f^n(y) \neq 0$ ,  $a_0 = 0$
  - Par récurrence on vérifie alors  $H_k : a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$  il suffit de composer par  $f^{n-k}$  la combinaison linéaire  $a_n f^n(y) + \dots + a_k f^k(y) = 0$
- Ayant  $n + 1$  éléments,  $B$  est une base de  $V$  et

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_0.$$

3b) Puisque  $D_n^{n+1} = 0$  et  $D_n^n(X^n) = n! \neq 0$ , l'existence de  $B_n$  est assurée.

Remarque : c'est l'art de faire faire de la théorie pour pas grand chose une solution évidente est

$$B = (1, X, X^2/2, \dots, X^n/n!)$$

Dans cette base, la matrice de  $\lambda Id + D_n$  est  $A_0 + \lambda I_n$  soit  $A_\lambda$ .

4)

4a) Avec les notations précédentes,  $h(y)$  se décompose sur la base  $B_2$  en :

$$h(y) = ay + bD_2(y) + cD_2^2(y).$$

Si de plus  $h$  et  $D_2$  commutent alors :

$$h(D_2(y)) = aD_2(y) + bD_2(D_2(y)) + cD_2^2(D_2(y))$$

et de même:

$$h(D_2^2(y)) = aD_2^2(y) + bD_2(D_2^2(y)) + cD_2^2(D_2^2(y))$$

Donc  $\boxed{h = aId + bD_2 + cD_2^2}$  puisque ces deux endomorphismes coïncident sur la base  $B_2$ .

4b) D'après I.1.a) et le résultat précédent, nécessairement  $g = P(D)$  avec  $P = a + bX + cX^2$ .

Sous cette forme et compte tenu de la nilpotence de  $D$ ,  $g^2 = P^2(D) = a^2 Id + 2abD_2 + (2ac + b^2)D_2^2$ .

Enfin  $(Id, D_2, D_2^2)$  est libre ( si  $\alpha Id + \beta D_2 + \gamma D_2^2 = 0$  alors en prenant la valeur sur le polynôme  $X^2$  :  $\alpha X^2 + 2\beta X + 2\gamma = 0$  donc  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ). Donc  $g^2 = \lambda Id + D$  si et seulement si  $g = aId + bD_2 + cD_2^2$  avec  $a^2 = \lambda, 2ab = 1, 2ac + b^2 = 0$ .

Ce dernier système n'a de solutions que si  $\lambda > 0$  et dans ce cas :

$$a = \pm\sqrt{\lambda}, b = \frac{1}{2a}, c = -\frac{1}{8a^3}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi les solutions de } G^2 = A_1 \text{ sont } G = \pm(I_2 + \frac{1}{2}A_0 - \frac{1}{8}A_0^2)}$$

## DEUXIEME PARTIE

1)

1a) Si  $g^2 = D_n$  alors  $g^{2n+2} = 0$  donc  $g$  est nilpotent.  
donc par le préliminaire b)  $0 < \dim(\ker(g)) < \dim(\ker(g^2))$

$\dim \ker g^2 > 2$

1b) Or  $\ker g^2 = \ker D_n = E_0$  qui est de dimension 1 ce qui contredit le résultat précédent :  $g$  n'existe pas.

c) Si  $g^2 = D$  alors par I.1.a il existe  $g_n$  tel que  $g_n^2 = D_n$  ce qui est impossible.

$g^2 = D$  est impossible

2)

2a) Les primitives d'un polynôme sont des polynômes donc  $D$  est surjective.

Donc pour tout entier  $m$ ,  $D^m$  est surjective donc  $D^m(E) = E$  et  $g(g^{k-1}(E)) = D^m(E) = E$  donc  $g$  est surjective

2b)  $\forall q \leq k$ ,  $\ker g^q \subset \ker g^k = \ker D^m = E_{m-1}$ .

Donc  $\ker g^q$  est de dimension finie pour  $0 < q < k$ .

2c)  $\forall P \in \ker g^p$ ,  $g^{p-1}(\Phi(P)) = g^{p-1}(g(P)) = 0$ .

Ainsi  $\Phi$  est une application de  $\ker g^p$  dans  $\ker g^{p-1}$ , linéaire comme  $g$ .

Le noyau de  $\Phi$  est  $\ker \Phi = \ker g \cap \ker g^p = \ker g$

L'image de  $\Phi$  est  $\ker(g^{p-1})$ : soit  $P \in \ker g^{p-1}$ , il existe  $Q \in E$  tel que  $g(Q) = P$  ( $g$  est surjective) et  $g^p(Q) = g^{p-1}(P) = 0$  donc  $Q$  est élément de  $\ker g^p$  ce qui légitime  $\Phi(Q) = P \in \text{Im}(\Phi)$ . D'où  $\text{Im}(\Phi) = \ker g^{p-1}$

Par le théorème du rang :

$\dim \ker \Phi + \dim \text{Im} \Phi = \dim \ker g^p$  soit  $\dim \ker g + \dim \ker g^{p-1} = \dim \ker g^p$ .

Il en résulte  $\dim \ker g^p = p \dim \ker g$  pour tout  $0 < p < k$

2d)  $\dim \ker D^m = \dim E_{m-1} = m$  et  $g^k = D^m$  donc  $k \dim \ker g = m$  et  $m$  est un multiple de  $k$ .

Réciproquement, si  $m = pk$  il suffit de prendre  $g = D^p$ .

D'où la condition nécessaire et suffisante  $m$  est un multiple de  $k$

Condition non remplie dans le cas II-1.c car  $m = 1$  et  $k = 2$ .

### TROISIEME PARTIE

1)

1a)

$$\begin{aligned} (I + tD_n) \circ \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k D_n^k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k D_n^k - (-1)^{k+1} t^{k+1} D_n^{k+1} \\ &= I_{n+1} - (-1)^{n+1} t^{n+1} D_n^{n+1} \text{ par simplification des } \sum \\ &= I_{n+1} \text{ car } D_n^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Même calcul en faisant le produit à gauche. Donc la matrice  $I + tD_n$  est inversible et son inverse est définie par :

$$(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k D_n^k$$

1b) L'expression précédente prouve que  $t \mapsto (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$  est dérivable et que sa dérivée est  $\sum_{k=1}^n (-1)^k k t^{k-1} D_n^k$ .  
En dérivant l'égalité  $(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ (I_{n+1} + tD_n) = I_{n+1}$ , il vient en utilisant que si  $f$  et  $g$  sont des endomorphismes  $C^1$   $(f \circ g)' = f' \circ g + f \circ g'$  (comme dérivation d'une application bilinéaire)

$((I_{n+1} + tD_n)^{-1})'(t) \circ (I_{n+1} + tD_n) + ((I_{n+1} + tD_n)^{-1}) \circ D_n = 0$  soit

$$((I_{n+1} + tD_n)^{-1})'(t) = -((I_{n+1} + tD_n)^{-1}) \circ D_n \circ ((I_{n+1} + tD_n)^{-1})$$

Comme de plus  $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$  commute avec  $D_n$  on peut écrire

$$((I_{n+1} + tD_n)^{-1})'(t) = -((I_{n+1} + tD_n)^{-2}) \circ D_n$$

1c)  $L_n(t) = D_n \circ P(D_n)$  où  $P$  est le polynôme  $P = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} X^{k-1}$ . Or tout polynôme de l'endomorphisme  $D_n$  commute avec  $D_n$ . Donc  $L_n(t)^{n+1} = D_n^{n+1} P^{n+1}(D_n)$  or  $D_n^{n+1} = 0$  d'où  $L_n^{n+1} = 0$

1d) En ajoutant un terme nul à  $L_n$  on obtient :

$$L_n'(t) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} t^{k-1} D_n^k = D_n \circ \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k D_n^k = D_n \circ (I_{n+1} + tD_n)^{-1}.$$

Comme  $L_n(t)$  et  $L_n'(t)$  commutent (polynômes en  $D_n$ ) on a :

- $(L_n^2(t))' = (L_n(t) \circ L_n(t))' = L_n(t) \circ L_n'(t) + L_n'(t) \circ L_n(t) = 2L_n'(t) \circ L_n(t)$

- et par récurrence  $(L_n^k(t))' = kL_n'(t) \circ L_n^{k-1}(t)$

$$(L_n^k(t))' = kL_n^{k-1}(t) \circ D_n \circ (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$$

2)  
2a) D'une part

$$\begin{aligned}\varphi_u(t) \circ \varphi_v(t) &= \sum_{p=0}^n \frac{u^p}{p!} (L_n(t))^p \circ \sum_{q=0}^n \frac{v^q}{q!} (L_n(t))^q = \sum_{p=0}^n \frac{u^p}{p!} \frac{v^q}{q!} (L_n(t))^{p+q} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{p+q=k} \frac{u^p v^q}{p! q!} L_n(t)^{p+q} \text{ en ordonnant suivant les puissances de } L_n(t) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} \frac{u^p v^q}{p! q!} L_n(t)^{p+q} \text{ car } L_n(t)^k = 0 \text{ pour } k \geq n+1\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\varphi_{u+v}(t) &= \sum_{m=0}^n \frac{(u+v)^m}{m!} L_n(t)^m \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{r=0}^m \frac{C_m^r}{m!} u^r v^{m-r} L_n(t)^m \text{ par le binôme de Newton,} \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{r=0}^m \frac{1}{r!(m-r)!} u^r v^{m-r} L_n(t)^m\end{aligned}$$

Le changement d'indice  $p = r, q = m - r$  montre l'égalité des deux expressions.

2b)  $t \mapsto \varphi_u(t)$  est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

En utilisant III-1.d :

$$\begin{aligned}\varphi'_u(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{u^k}{k!} k(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ L_n^{k-1}(t) = u(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ \sum_{k=1}^n \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} L_n^{k-1}(t) \\ &= u(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k}{k!} L_n^k(t) = u(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} L_n^k(t) \text{ car } D_n \circ L_n^n(t) = 0 \\ &= u(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ \varphi_u(t)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\varphi'_u(t) = u(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ \varphi_u(t)}$$

2c)  $\varphi'_1$  est dérivable comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\varphi''_1(t) &= ((I_{n+1} + tD_n)^{-1})'(t) \circ D_n \circ \varphi_1(t) + (I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ \varphi'_1(t) \\ &= -(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ (I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ \varphi_1(t) + (I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ (I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ D_n \circ \varphi_1(t) = 0\end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi''_1(t) = 0$  est nul pour tout réel  $t$  ; par conséquent  $\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + t\varphi'_1(0)$ .

Comme  $L_n(0) = 0$  on déduit  $\varphi_1(0) = I$  et  $\varphi'_1(0) = D_n \circ \varphi_n(0) = D_n$  et l'on conclut :

$$\forall t \in R, \quad \boxed{\varphi_1(t) = I + tD_n}$$

3)

$$3a) \lambda I + D_n = \lambda(I + \frac{1}{\lambda} D_n) = \lambda \varphi_1(\frac{1}{\lambda}) = \lambda (\varphi_1(\frac{1}{\lambda}))^2 = \left(\sqrt{\lambda} \varphi_1(\frac{1}{\lambda})\right)^2$$

Ce qui prouve l'existence de  $\boxed{M = \pm \sqrt{\lambda} \varphi_1(\frac{1}{\lambda})}$  donc de  $g$  pour  $\lambda > 0$ .

$$3b) \text{ Pour } \lambda = 1 \text{ et } n = 2 \text{ il vient } L_n(1/\lambda) = L_2(1) = D_2 - \frac{1}{2} D_2^2 \text{ puis}$$

$$\varphi(1) = I + \frac{1}{2} L_2(1) + \frac{1}{8} L_2^2(1) = I + \frac{1}{2} (D_2 - \frac{1}{2} D_2^2) + \frac{1}{8} D_2^2 = I + \frac{1}{2} D_2 - \frac{1}{8} D_2^2$$

On retrouve bien les matrices  $G$  puisque  $A_0 = D_2$  avec les notations de l'énoncé.

## QUATRIEME PARTIE

1) Remarque : question de cours pour retrouver le DSE de  $(1+x^\alpha)$

1a)  $h$  vérifie sur  $] -1, +\infty[$  (mais pas sur  $[-1, +\infty[$ ) l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\boxed{(1+x)y' = \frac{1}{2}y}$$

1b) On cherche alors une solution développable en série entière  $\sum_{b=0}^{\infty} b_p x^p$  et telle que  $b_0 = 1$ . On vérifie sans problème

$$b_0 = 1 \text{ et } b_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) / p! \text{ pour } p \in N^*$$

et que  $R = 1$

1c) Par produit de Cauchy de deux séries entières sur le disque ouvert de convergence  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = (h(x))^2 = (1+x)$

$$\boxed{c_0 = c_1 = 1, \forall k > 1 \ c_k = 0}$$

2)

2a) Si  $P$  est un polynôme de degré  $n$  alors  $T(P) = \sum_{p=0}^n \frac{b_p}{\lambda^p} D^p P + 0$  est bien un polynôme.

En prenant  $n = \max(d(P), d(Q))$  on vérifie alors la linéarité de  $T = \sum_{p=0}^n \frac{b_p}{\lambda^p} D^p$ .  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

2b) On peut remarquer que  $E_n$  est stable par  $T$ . Notons  $T_n$  l'endomorphisme induit par  $T$  sur  $E_n$ . On a pour  $P \in E_n$  :  $T^2(P) = T_n^2(P)$ .

Or  $T_n = \sum_{p=0}^n \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$  ce qui conduit, compte tenu de  $D_n^k = 0$  pour  $k > n$  à

$$T_n^2 = \sum_{p=0}^n \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p \sum_{q=0}^n \frac{b_q}{\lambda^q} D_n^q = \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} \frac{b_p b_q}{\lambda^{p+q}} D_n^{p+q} = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{\lambda^k} D_n^k = I + \frac{1}{\lambda} D_n$$

Ainsi  $T^2(P) = P + \frac{1}{\lambda} DP$  et finalement :  $T^2 = Id + \frac{1}{\lambda} D$ .

c)  $g = \pm \sqrt{\lambda} T$  convient. ( $\lambda > 0$ )

d) Et  $g_n = \pm \sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^n \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$ .

Dans le cas I-4,  $n = 2$  et  $\lambda = 1$ .

Donc  $g_2 = \pm (b_0 I + b_1 D_2 + b_2 D_2^2)$  avec  $b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{8}$  ce qui redonne les matrices précédentes.