

ÉCOLE DE L'AIR CONCOURS 1999 MATH 1

Préliminaire : étude de φ_n

P1: φ_n est la primitive, nulle en zéro de la fonction continue sur \mathbb{R}^+ f_n . Donc φ_n est définie (et C^1) sur \mathbb{R}^+ . Sur ce intervalle f_n est C^∞ comme quotient de fonctions C^∞ à dénominateur non nul.

$$\boxed{\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})}$$

P2: Au voisinage de $+\infty$ on a : $e^t \gg t^n$. Donc $f_n(t) \gg 1$. f_n est une fonction continue, positive, dominant une fonction non intégrable donc :

$$\boxed{f_n \text{ n'est pas intégrable sur } \mathbb{R}^+}$$

Comme la fonction φ_n est croissante (car de dérivée positive) sur \mathbb{R}^+ et qu'il n'existe pas de limite finie (f_n n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^+)

$$\boxed{\lim_{+\infty}(\varphi_n) = +\infty}$$

P3-4 φ_n est strictement croissante continue sur \mathbb{R}^+ . φ_n est donc, d'après le théorème de bijection monotone bijective C^1 sur $[\varphi_n(0), \lim_{+\infty}(\varphi_n)[= \mathbb{R}^+$. De plus la dérivée $\varphi_n'(x)$ est non nul pour tout réel $x \geq 0$. φ_n^{-1} est donc la fonction réciproque sur \mathbb{R}^+ d'une fonction C^∞ à dérivée toujours non nul :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } \mathbb{R}^+}$$

Partie I : Étude de la suite de fonctions (f_n)

I.1.a On a déjà vu que f_n est C^∞ sur \mathbb{R}^+ . De plus $f_n' = \frac{e^t(1+t^n - nt^{n-1})}{(1+t^n)^2}$; Si on pose $N(t) = 1+t^n - nt^{n-1}$ on a une fonction C^1 de dérivée $N'(t) = nt^{n-2}(t - (n-1))$. D'où les variations :

$$\begin{cases} \text{sur } [0, n-1] & N(t) \text{ décroît de } 1 \text{ à } 1 - (n-1)^{n+1} < 0 \\ \text{sur } [n-1, +\infty[& N(t) \text{ croît de } 1 - (n-1)^{n+1} \text{ à } +\infty \end{cases}$$

Sur chaque intervalle $[0, n-1]$ et $[n-1, +\infty[$, $N(t)$ est continue monotone et change de signe. De plus $N(1) = 2 - n < 0$ (car $n \geq 3$)

$$\boxed{f_n'(t) \text{ admet deux racines } \alpha_n \in [0, n-1] \text{ et } \beta_n \in [n-1, +\infty[}$$

I.1.b On a $N(n) = 1 > 0$ donc $\beta_n < n$.

On peut majorer $f_n(\beta_n)$ d'après les variations de f_n :

$$f_n(\beta_n) \leq f_n(n) = \frac{e^n}{1+n^n} \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n = \exp(n(e - \ln(n))) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

De plus f_n est à valeurs positives donc par encadrement :

$$\boxed{n-1 < \beta_n < n \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(\beta_n)) = 0}$$

I.1.c

On a d'après le fait que $N(\alpha_n) = 0$, $\alpha_n^{n-1}(n - \alpha_n) = 1$ donc $\alpha_n^{n-1} = \frac{1}{n - \alpha_n} \sim \frac{1}{n}$ car α_n est borné.

Faute usuel à ne pas faire : $u_n \sim v_n \Rightarrow \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$:

On a $(\alpha_n)^{n-1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc $(n-1)\ln(\alpha_n) = \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\ln(n) + \ln(1 + o(1)) = -\ln(n) + o(1)$

On a donc : $\ln(\alpha_n) = \frac{-\ln(n)}{n-1} + o(1)$ et donc $\lim_{+\infty}(\alpha_n) = 1$

En outre $f_n(\alpha_n) = \frac{\exp(\alpha_n)}{1 + \alpha_n \cdot \alpha_n^{n-1}} \rightarrow \frac{e}{1+0} \cdot \lim_{+\infty} (f_n(\alpha_n)) = e$

I.2.a D'après les limites de la suite géométrique (t^n) , on a $\begin{cases} t \in [0, 1[\Rightarrow \lim(f_n(t)) = g(t) = e^t \\ t = 1 \Rightarrow \lim(f_n(t)) = g(t) = e/2 \\ t > 1 \Rightarrow \lim(f_n(t)) = g(t) = 0 \end{cases}$.

I.2.b+c $f_{n+1}(t) - f_n(t)$ est du signe de $t^n(1-t)$ donc $f_{n+1}(t)$ est au dessus de $f_n(t)$ pour $0 \leq t < 1$, et le contraire pour $t > 1$.

• Puisque $g(t) = 0$ pour $t > 1$ le graphe de f_n est au dessus de $g = 0$ pour $t > 1$.

• $f_n(t) - e^t = \frac{-t^n e^t}{1+t^n} < 0$: $f_n(t)$ est en dessous strictement de $g(t) = e^t$ pour $0 < t < 1$. Pour $t = 0$ $f_n(0) = e^0 = g(0) = e$ et pour $t = 1$ $f_n(1) = g(1) = \frac{e}{2}$, il y a croisement.

I.2.d g limite simple de fonctions continues, n'est pas continue

$$\boxed{\text{il n'y a donc pas convergence uniforme de la suite } f_n \text{ vers } g \text{ sur } \mathbb{R}^+}$$

I.3 : Théorème de convergence dominée : Sur un segment $[a, b]$ si la suite de fonctions (f_n) est une suite de fonctions continue par morceaux qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux et si il existe une fonction ϕ indépendant de x continue par morceaux telle que $|f_n| \leq \phi$ alors : $\int_a^b f = \lim_{+\infty} \left(\int_a^b f_n \right)$.

On se place sur le segment $0, A$ et on a la domination $|f_n(t)| \leq e^t$. On peut permuter limite et intégrale:

$$\begin{cases} \text{Si } A \leq 1 & \int_0^A f_n(t) dt \rightarrow \int_0^A g(t) dt = e^A - 1 \\ \text{Si } A > 1 & \int_0^A f_n(t) dt = \int_0^1 + \int_1^A \rightarrow e - 1 \end{cases}$$

Partie II : La suite $(x_n(\alpha))$

II.1.a $x_n(\alpha)$ est défini par $\varphi_n(x_n(\alpha)) = \alpha$. Comme φ_n est bijective de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ α admet un unique antécédent.

$$\boxed{x_n(\alpha) = \varphi_n^{-1}(\alpha)}$$

II.1.b x_n est strictement croissante car φ_n l'est et $\lim_{+\infty} (x_n) = +\infty$

II.2 Comme φ_n est un C^∞ difféomorphisme de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ , $\boxed{x_n \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)}$

En outre d'après la dérivation d'une fonction réciproque et celui d'une primitive :

$$\boxed{x'_n(\alpha) = \frac{1}{\varphi'_n(x_n(\alpha))} = \frac{1}{f_n(x_n(\alpha))}}$$

II.3 En dérivant cette relation (x_n est au moins C^2) $x''_n(\alpha) = -\frac{f'_n(x_n(\alpha))x'_n(\alpha)}{f_n(x_n(\alpha))^2}$. Comme x'_n ne s'annule pas, $x''_n(\alpha) = 0$ si et seulement si $x_n(\alpha) = \alpha_n$ ou β_n .

$$\boxed{\text{Les abscisses des points d'inflexion sont donc } \int_0^{\alpha_n} f_n(t) dt \text{ et } \int_0^{\beta_n} f_n(t) dt}$$

II.4.a On a : $\int_0^1 f_n(t) dt \leq \int_0^1 e^t dt = e - 1$. Donc $\varphi_n(1) \leq e - 1$. Donc par variation de φ_n : $x < 1 \Rightarrow \varphi_n(x) < e - 1$. La condition $\alpha > e - 1$ assure donc : $\boxed{x_n(\alpha) > 1}$

Par Chasles $I_n = \int_0^{x_n(\alpha)} f_n(t) dt - \int_0^A f_n(t) dt = \alpha - \int_0^A f_n(t) dt \rightarrow \alpha - e + 1$.

$$\boxed{I_n = \int_A^{x_n(\alpha)} f_n(t) dt \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \alpha - e + 1}$$

II.4.b On doit montrer : $\forall A, \exists n_0(A), n \geq n_0(A) \Rightarrow x_n(\alpha) \geq A$.

On peut se limiter à $A > 1$ sans restreindre le problème. Pour $A \leq 1$ on prendra $n_0(A) = n_0(1)$.

Soit alors $A \geq 1$ fixé. D'après le calcul précédent I_n admet un limite strictement positive si n tend vers $+\infty$. Donc I_n est positive à partir d'un certain rang n_0 . Comme on intègre une fonction positive, si l'intégrale est positive les bornes ont du bon sens donc $x_n(\alpha) \geq A$. C'est ce que l'on veut prouver.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n(\alpha)) = +\infty}$$

II.5.a On suppose par l'absurde :

$$\forall N, \exists n \geq N, x_n(\alpha) < 1$$

On a donc : $\alpha = \int_0^{x_n(\alpha)} f_n(t) dt \geq \int_0^1 f_n(t) dt$. En faisant tendre N vers $+\infty$, n tend aussi vers $+\infty$ donc par passage à la limite en utilisant I3: $\alpha \geq e - 1$. **ABSURDE** :

$$\boxed{\exists N, \forall n \geq N, x_n(\alpha) < 1}$$

II.5.b Méthode classique : On sait que $\varphi_n(x_n(\alpha)) = \varphi_{n+1}(x_{n+1}(\alpha)) = \alpha$ et que φ_n est croissante. Pour classer les objets on classe leurs images:

sur $[0, 1]$, $t^n \geq t^{n+1}$ donc $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ donc $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$. En particulier

$$\varphi_n(x_{n+1}) \leq \varphi_{n+1}(x_{n+1}) = \varphi_n(x_n)$$

et donc : $x_{n+1}(\alpha) < x_n(\alpha)$ La suite $(x_n(\alpha))$ décroît à partir du rang N .

Décroissante minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

II.5.c $|\int_\ell^{x_n(\alpha)} f_n(t) dt| \leq |x_n(\alpha) - \ell| \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t)| \leq |x_n(\alpha) - \ell| e^n$.

D'après I3 $\lim \left(\int_\ell^{x_n(\alpha)} f_n(t) dt \right) = \lim \left(\int_0^{x_n(\alpha)} f_n(t) dt - \int_0^\ell f_n(t) dt \right) = \alpha - e^\ell + 1$. Or cette quantité est nulle d'après la question précédente.

$$\boxed{\lim (x_n(\alpha)) = \ln(\alpha + 1)}$$

Partie III : Cas particulier $\alpha = e - 1$

III.1 Méthode classique de séparation des parties paires et impaires d'une série (cf le dernier DS) :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^2}$$

$$S = \frac{\pi^2}{12}$$

III.2.a *Remarque : la réponse est à la question III3c*

D'après le développement $\ln(1+s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} s^k}{k}$ on a $u(x) = x \int_{\alpha}^1 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{kx}}{k} dt$; Pour la série alternée sous le signe intégral, le reste est inférieur au premier terme négligé: $R_k(t) \leq \frac{t^{kx}}{k} \leq \frac{1}{k}$ indépendant de t et de limite nulle. On a doré une série de fonctions continue qui converge uniformément sur le segment $[\alpha, 1]$

On peut donc permuter somme et intégrale, ce qui donne le résultat annoncé car $\int_{\alpha}^1 t^m dt = \frac{1}{m+1} [1 - \alpha^{m+1}]$.

III.2.b La nouvelle forme de la série donnant $u(x)$ permet de prouver la convergence normale de la série de fonctions sur $[1, +\infty[$. En effet $\left| \frac{(-1)^{k+1} (1-\alpha^{kx+1}) x}{k(kx+1)} \right| = \frac{1-\alpha^{kx+1}}{k(kx+1)} \leq \frac{1}{k^2}$ car $0 \leq \alpha \leq 1$. La série $\sum \frac{1}{k^2}$ ne dépend plus de x et converge (série de Riemann).

Remarque : si k croît $k \rightarrow \alpha^{kx+1}$ décroît ($\alpha < 1$) donc $\frac{1-\alpha^{kx+1}}{k(kx+1)}$ est le quotient de deux suites croissantes. Il se révèle difficile d'utiliser le théorème des séries alternées pour prouver la convergence uniforme.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1} (1-\alpha^{kx+1})}{k(kx+1)} \right) = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ Donc grâce à la convergence uniforme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (u(x)) = \frac{\pi^2}{12}$$

III.3.a f est continue sur le segment $[\alpha, 1]$ donc y est bornée (par M_{α}) $\left| \int_{\alpha}^1 t^x f(t) dt \right| \leq M_{\alpha} \int_{\alpha}^1 t^x dt = \frac{1}{x+1} M(1 - \alpha^{x+1})$: $\frac{M}{x+1} \rightarrow 0$. $\left[\int_{\alpha}^1 t^x f(t) dt \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0 \right]$

III.3.b On intègre par parties les fonctions (de t) f et $t \rightarrow \frac{t^{kx+1}}{kx+1}$ étant C^1 sur le segment $[\alpha, 1]$:

, Donc $x \int_{\alpha}^1 t^{kx} f(t) dt = \frac{x f(1)}{kx+1} - x \int_{\alpha}^1 f'(t) \frac{t^{kx+1}}{kx+1} dt \rightarrow \frac{f(1)}{k} - 0$.

$$x \int_{\alpha}^1 t^{kx} f(t) dt \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)}{k}$$

III.3.c On suppose $x > 0$.

Comme on ne sait plus que f est positive, le critère des séries alternées ne s'applique plus.

Montrons que la série $\left| \int_{\alpha}^1 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{kx}}{k} x f(t) dt \right|$ converge. On a :

$$\left| \int_{\alpha}^1 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{kx}}{k} x f(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^1 \frac{t^{kx}}{k} x M_{\alpha} dt \leq \frac{M_{\alpha}}{k^2}$$

qui est bien le terme général d'une série convergente.

$$x \int_a^1 \ln(1+t^x) f(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \int_a^1 \frac{t^{kx}}{k} x f(t) dt$$

Or $\left| (-1)^{k+1} \int_a^1 \frac{t^{kx}}{k} x f(t) dt \right| \leq \frac{M_{\alpha}}{k^2}$ ce qui assure comme au III2 la convergence uniforme de la série sur $[1, +\infty[$ et donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \int_a^1 \frac{t^{kx}}{k} x f(t) dt \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{f(1)}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} f(1)$$

III.4.a Cas $b < 1$: Dans ce cas M étant le maximum de $|f|$ continue sur $[a, b]$,

$n^p |I_n| \leq n^p \int_a^b M t^n dt = M n^p b^n (b-a) \rightarrow 0$ quel que soit p , puisque l'exponentielle b^n l'emporte sur la puissance n^p ($0 \leq b < 1$)

III.4.b **Cas $b = 1$:**

On intègre I_n par parties : $I_n = \int_a^1 \frac{t^{n-1} dt}{1+t^n} t f(t)$. ce qui donne en posant $u(t) = t f(t)$, $v'(t) = \frac{t^{n-1} dt}{1+t^n}$ $I_n = \frac{f(1) \ln 2}{n} - \frac{1}{n} \ln(1+a^n) a f(a) - \frac{1}{n} \int_a^1 (f(t) + t f'(t)) \ln(1+t^n) dt$,

Le terme central $\frac{1}{n} \ln(1+a^n) a f(a) \sim K a^n / n$ tend vers 0 car $0 \leq a < 1$.

Pour le dernier on utilise (III.3.c) avec la fonction $C^1 : t \rightarrow (f(t) + t f'(t))$: , ce qui donne:

$$n \int_a^1 \ln(1+t^n) (f(t) + t f'(t)) dt \rightarrow (f(1) + f'(1)) \frac{\pi^2}{12}$$

$$I_n = \frac{f(1) \ln 2}{n} - \frac{(f(1) + f'(1)) \pi^2}{12 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

III.4.c **Cas $a \geq 1$:**

$I_n = \int_a^b \frac{t^n + 1}{1+t^n} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_a^b \frac{f(t)}{1+t^n} dt$.

Si $a \geq 1$, le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans la seconde intégrale $\int_a^b \frac{f(t)}{1+t^n} dt$ donne $\int_a^b \frac{f(t)}{1+t^n} dt = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{u^n}{1+u^n} \frac{f(\frac{1}{u})}{u^2} du$.

Comme $\frac{1}{a} \leq 1$ on est ramené aux cas précédents avec $G(u) = \frac{f(\frac{1}{u})}{u^2}$, jouant le rôle de f .

• Si $a > 1$ alors $\lambda_1 = \int_a^b f(t) dt$, $\lambda = \mu = 0$, puisque l'intégrale $\int_a^b \frac{f(t)}{1+t^n} dt$ est négligeable devant tout $\frac{1}{n^p}$.

• Si $a = 1$ $\lambda_1 = \int_a^b f(t) dt$, $\lambda = -G(1) \ln 2 = -f(1) \ln 2$. Et $\mu = \left(\frac{\pi^2}{12} G(1) + G'(1) \right)$.

Or $G'(u) = -f'(\frac{1}{u}) \frac{1}{u^4} - 2f(\frac{1}{u}) \frac{1}{u^3}$ et $G'(1) = -f'(1) - 2f(1)$ et $\mu = -\frac{\pi^2}{12} (f(1) + f'(1))$.

$$\boxed{\text{Si } a = 1, I_n = \int_1^b f(t) dt - \frac{f(1) \ln(2)}{n} - \frac{(f(1)+f'(1))\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

III.4.d pour $a < 1 < b$: On scinde en deux I_n par Chasles, et on applique (4.b) et (4.d).

$I_n = \int_a^1 \frac{t^n}{1+t^n} f(t) dt + \int_1^b \frac{t^n}{1+t^n} f(t) dt = \frac{f(1) \ln 2}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} \frac{\pi^2}{12} + \int_1^b f(t) dt - f(1) \ln 2 \frac{1}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} \frac{\pi^2}{12} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, qui après réduction donne le résultat attendu:

$$\boxed{I_n = \int_1^b f(t) dt - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} \frac{\pi^2}{6} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

III.5

Posons $K_n = \int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n} dt = \int_0^\gamma \frac{e^t(1+t^n-t^n)}{1+t^n} dt = e^\gamma - 1 - \int_0^\gamma \frac{t^n e^t}{1+t^n} dt$; L'intégrale $J_n = \int_0^\gamma \frac{t^n e^t}{1+t^n} dt$ est du type de I_n avec $f(t) = e^t$ qui est bien C^2 .

$$\begin{cases} \text{Si } \gamma < 1 \text{ c'est le cas (4.a) et } J_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \text{Si } \gamma = 1 \text{ c'est le cas (4.b) et } J_n = \frac{e \ln 2}{n} - \frac{2e\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \text{Si } \gamma > 1 \text{ c'est le cas (4.c) et } J_n = \int_1^\gamma e^t dt - \frac{2e\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = e^\gamma - e - \frac{2e\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{cases}$$

Par suite :

$$K_n = \int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n} dt = \begin{cases} \text{Si } \gamma < 1 \text{ } K_n = e^\gamma - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \text{Si } \gamma = 1 \text{ } K_n = e - 1 - \frac{e \ln 2}{n} + \frac{2e\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \text{Si } \gamma > 1 \text{ } K_n = e - 1 + \frac{e\pi^2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{cases}$$

III.6.a Par Chasles $\int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = \int_0^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt - \int_0^A \frac{e^t}{1+t^n} dt$; et il suffit de remplacer γ par A pour la deuxième intégrale et les deux dernières lignes de l'accolade précédente. Le $e - 1$ se réduit dans les deux cas et la limite est 0.

L'équivalent est alors le premier terme non nul : $\begin{cases} A = 1 : \int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt \sim -\frac{e \ln(2)}{n} \\ A > 1 : \int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt \sim \frac{e\pi^2}{3n^2} \end{cases}$

III.6.b On vient de voir que pour $A > 1$, $\int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt \sim \frac{K}{n^2} > 0$, avec $K > 0$ indépendant de A , donc $x_n(\alpha) > A$ ("positivité de l'intégrale") : donc $x_n(\alpha) > A$ aussi grand que soit A et $\boxed{x_n(\alpha) \rightarrow +\infty}$ (idem II4)

III.7

On a vu $\int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n} dt = e^\gamma - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour $\gamma < 1$.

Comme $\ell < 1$, on a aussi :

$\int_0^\ell \frac{e^t}{1+t^n} dt = e^\ell - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et enfin $\int_0^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = \alpha = e - 1$;

Soit en retranchant :

$\int_\ell^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = e^\ell - 1 - \alpha + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$;

Or le théorème de la moyenne donne : $(x_n(\alpha) - \ell) \frac{e^c}{1+c^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$;

Mais comme $x_n(\alpha)$ tend vers $\ell < 1$, c^n tend vers 0; d'où le résultat demandé puisque $e^c \geq 1$.