ECOLE DE L'AIR
CONCOURS 1999
MATH 1

Préliminaire :étude de φ_n

P1: φ_n est la primitive , nulle en zéro de la fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ f_n . Donc φ_n est définie (et C^1) sur $\mathbb{R}^+$. sur ce intervalle f_n est C^∞ comme quotient de fonctions C^∞ à dénominateur non nul .

$$\boxed{\phi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})}$$

P2 : Au voisinage de $+\infty$ on a : $e^t \gg t^n$. Donc $f_n(t) \gg 1$. f_n est une fonction continue , positive , dominant une fonctio non intégrable donc :

$$\boxed{f_n \text{ n'est pas intégrable sur } \mathbb{R}^+}$$

Comme la fonction φ_n est croissante (car de dérivée positive) sur $\mathbb{R}^+$ et qu'il n'existe pas de limite fini (f_n n'est pa intégrable sur $\mathbb{R}^+$)

$$\boxed{\lim_{+\infty}(\varphi_n) = +\infty}$$

P3-4φ_n est strictement croissante continue sur $\mathbb{R}^+$. φ_n est donc , d'après le théorème de bijection monotone bijective d $\mathbb{R}^+$ sur $[\varphi_n(0), \lim_{+\infty}(\varphi_n)[= \mathbb{R}^+$. De plus la dérivée $\varphi_n'(x)$ est non nul pour tout réel $x \geq 0$. ϕ_n^{-1} est donc la fonctio réciproque sur $\mathbb{R}^+$ d'une fonction C^∞ à dérivée toujours non nul :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } \mathbb{R}^+}$$

Partie I : Étude de la suite de fonctions (f_n)

I.1.a On a déjà vu que f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$. De plus $f_n' = \frac{e^t(1+t^n-nt^{n-1})}{(1+t^n)^2}$; Si on pose $N(t) = 1+t^n-nt^{n-1}$ on a une fonctio C^1 de dérivée $N'(t) = nt^{n-2}(t-(n-1))$. D'où les variations :

$$\begin{cases} \text{sur } [0, n-1] \ N(t) \text{ décroit de 1àà } 1-(n-1)^{n+1} < 0 \\ \text{sur } [n-1, +\infty[\ N(t) \text{ croit de à } 1-(n-1)^{n+1} \text{àà } +\infty \end{cases}$$

Sur chaque intervalle $[0, n-1]$ et $[n-1, +\infty[$, $N(t)$ est continue monotone et change de signe.
De plus $N(1) = 2-n < 0$ (car $n \geq 3$)

$$\boxed{f_n'(t) \text{ admet deux racines } \alpha_n \in \boxed{0, n-1} \text{ et } \beta_n \in \boxed{n-1, +\infty}}$$

I.1.b On a $N(n) = 1 > 0$ donc :$\beta_n < n$. .
On peut majorer $f_n(\beta_n)$ d'après les variations de f_n :

$$f_n(\beta_n) \leq f_n(n) = \frac{e^n}{1+n^n} \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n = \exp\left(n\left(e - \ln(n)\right)\right) \to_{n\to\infty} 0$$

De plus f_n est à valeurs positives donc par encadrement :

$$\boxed{n-1 < \beta_n < n \text{ et } \lim_{n\to\infty}(f_n(\beta_n)) = 0}$$

I.1.c
On a d'après le fait que $N(\alpha_n) = 0$, $\alpha_n^{n-1}(n-\alpha_n) = 1$ donc $\alpha_n^{n-1} = \frac{1}{n-\alpha_n} \sim \frac{1}{n}$ car α_n est borné .
Faute usuel à ne pas faire : $u_n \sim v_n \Rightarrow \ln(_n) \sim \ln(v_n)$:
On a $(\alpha_n)^{n-1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc $(n-1)\ln(\alpha_n) = \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\ln(n) + \ln(1+o(1)) = -\ln(n) + o(1)$
On a donc : $\ln(\alpha_n) = \frac{-\ln(n)}{n-1} + o(1)$ et donc $\underline{\lim_{+\infty}(\alpha_n) = 1}$
En outre $f_n(\alpha_n) = \frac{\exp(\alpha_n)}{1+\alpha_n.\alpha_n^{n-1}} \to \frac{e}{1+0}$. $\underline{\lim_{+\infty}(f_n(\alpha_n) = e}$

I.2.a D'après les limites de la suite géométrique(t^n), on a $\begin{cases} t \in [0,1[\Rightarrow \lim(f_n(t)) = g(t) = e^t \\ t = 1 \Rightarrow \lim(f_n(t)) = g(t) = e/2 \\ t > 1 \Rightarrow \lim(f_n(t)) = g(t) = 0 \end{cases}$.

I.2.b+c $f_{n+1}(t) - f_n(t)$ est du signe de $t^n(1-t)$ donc $f_{n+1}(t)$ est au dessus de $f_n(t)$ pour $0 \leq t < 1$, et le contraire pou $t > 1$.
• Puisque $g(t) = 0$ pour $t > 1$ le graphe de f_n est au dessus de $g = 0$ pour $t > 1$.
• $f_n(t) - e^t = \frac{-t^n e^t}{1+t^n} < 0$: $f_n(t)$ est en dessous strictement de $g(t) = e^t$ pour $0 < t < 1$. Pour $t = 0$ $f_n(0) = e^0 = g(0) =$ et pour $t = 1$ $f_n(1) = g(1) = \frac{e}{2}$, il y a croisement.
I.2.d g limite simple de fonctions continues, n'est pas continue

,$\boxed{\text{il n'y a donc pas convergence uniforme de la suite } f_n \text{ vers } g \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$

I.3 :Théorème de convergence dominée : Sur un segment $[a, b]$ si la suite de fonctions (f_n) est une suite de fonctions continu par morceaux qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux et si il existe une fonction ϕ indépendant de x continue par morceaux telle que $|f_n| \leq \phi$ alors : $\int_a^b f = \lim_{+\infty} \left(\int_a^b f_n\right)$.

On se place sur le segment $0, A$ et on a la domination $|f_n(t)| \leq e^t$. On peut permuter limite et intégrale:

$$\begin{cases} \text{Si } A \leq 1 \ \int_0^A f_n(t)dt \to \int_0^A g(t)dt = e^A - 1 \\ \text{Si } A > 1 \int_0^A f_n(t)dt = \int_0^1 + \int_1^A \to e - 1 \end{cases}$$

Partie II : La suite $(x_n(\alpha))$

II.1.a $x_n(\alpha)$ est défini par $\varphi_n(x_n(\alpha)) = \alpha$. Comme φ_n est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ α admet un unique antécédent.

$$\boxed{x_n(\alpha) = \varphi_n^{-1}(\alpha)}$$

II.1.b x_n est strictement croissante car φ_n l'est et $\lim_{+\infty}(x_n) = +\infty$

II.2 Comme φ_n est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, $\boxed{x_n \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)}$.

En outre d'après la dérivation d'une fonction réciproque et celui d'une primitive :

$$\boxed{x'_n(\alpha) = \frac{1}{\varphi'(x_n(\alpha))} = \frac{1}{f_n(x_n(\alpha))}}$$

II.3 En dérivant cette relation (x_n est au moins C^2) $x"_n(\alpha) = -\frac{f'_n(x_n(\alpha))x'_n(\alpha)}{f_n(x_n(\alpha))^2}$. Comme x'_n ne s'annule pas , $x"_n(\alpha) =$ si et seulement si $x_n(\alpha) = \alpha_n$ ou β_n.

$$\boxed{\text{Les abscisses des points d'inflexion sont donc } \int_0^{\alpha_n} f_n(t)dt \ \text{ et } \int_0^{\beta_n} f_n(t)dt}$$

II.4.a On a : $\int_0^1 f_n(t)dt \leq \int_0^1 e^t dt = e - 1$. Donc $\varphi_n(1) \leq e - 1$. Donc par variation de φ_n : $x < 1 \Rightarrow \varphi_n(x) < e - 1$. L condition $\alpha > e - 1$ assure donc : $\boxed{x_n(\alpha) > 1}$.

Par Chasles $I_n = \int_0^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt - \int_0^A f_n(t)dt = \alpha - \int_0^A f_n(t)dt \to \alpha - e + 1$.

$$\boxed{I_n = \int_A^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt \to_{n\to+\infty} \alpha - e + 1}$$

II.4.bOn doit montrer : $\forall A, \exists n_0(A)$, $n \geq n_0(A) \Rightarrow x_n(\alpha) \geq A$.

On peut se limiter à $A > 1$ sans restreindre le problème . Pour $A \leq 1$ on prendra $n_0(A) = n_0(1)$.

Soit alors $A \geq 1$ fixé . D'après le calcul précédent I_n admet un limite strictement positive si n tend vers $+\infty$. Donc I_n es positive à partir d'un certain rang n_0 . Comme on intègre une fonction positive , si l'intégrale est positive les bornes ont dan le bon sens donc $x_n(\alpha) \geq A$. C'est ce que l'on veut prouver .

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n(\alpha)) = +\infty}$$

II.5.a On suppose par l'absurde :

$$\forall N\ , \exists n \geq N\ , x_n(\alpha) \geq 1$$

On a donc : $\alpha = \int_0^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt \geq \int_0^1 f_n(t)dt$. En faisant tendre N vers $+\infty$, n tend aussi vers $+\infty$ donc par passage à l limite en utilisant I3: $\alpha \geq e - 1..ABSURDE$:

$$\boxed{\exists N, \forall n \geq N\ , x_n(\alpha) < 1}$$

II.5.b Méthode classique : On sait que $\varphi_n(x_n(\alpha)) = \varphi_{n+1}(x_{n+1}(\alpha)) = \alpha$ et que φ_n est croissante . Pour classer les objet on classes leurs images:

sur $[0, 1]$, $t^n \geq t^{n+1}$ donc $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ donc $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$. En particulier

$$\varphi_n(x_{n+1}) \leq \varphi_{n+1}(x_{n+1}) = \varphi_n(x_n)$$

et donc : $x_{n+1}(\alpha) < x_n(\alpha)$ La suite $(x_n(\alpha))$ décroît à partir du rang N.

Décroissante minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

II.5.c $|\int_\ell^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt| \leq |x_n(\alpha) - \ell| \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| \leq |x_n(\alpha) - \ell| e^1$.

D'après I3 $\lim \left(\int_\ell^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt\right) = \lim \left(\int_0^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt - \int_0^l f_n(t)dt\right) = \alpha - e^l + 1$. Or cette quantité est nulle d'après l question précédente .

$$\lim(x_n(\alpha)) = \ln(\alpha + 1)$$

Partie III : Cas particulier $\alpha = e - 1$

III.1 Méthode classique de séparation des parties paires et impaires d'une série (cf le dernier DS) :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = 2\sum_{p=1}^\infty \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^2}$$

$$\boxed{S=\frac{\pi^2}{12}}$$

III.2.a *Remarque : la réponse est à la question III3c*

D'après le développement $\ln(1+s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ on a $u(x)=x\int_{\alpha}^{1}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{kx}}{k}dt$; Pour la série alternée sous le signe intégral, le reste est inférieur au premier terme négligé:$R_k(t)\leq\frac{t^{kx}}{k}\leq\frac{1}{k}$ indépendant de t et de limite nulle. On a donc une série de fonctions continue qui converge uniformément sur le segment $[\alpha,1]$

On peut donc permuter somme et intégrale, ce qui donne le résultat annoncé car $\int_{\alpha}^{1}t^m dt=\frac{1}{m+1}[1-\alpha^{m+1}]$.

III.2.b La nouvelle forme de la série donnant $u(x)$ permet de prouver la convergence normale de la série de fonctions sur $[1,+\infty]$. En effet $\left|\frac{(-1)^{k+1}(1-\alpha^{kx+1})x}{k(kx+1)}\right|=\frac{1-\alpha^{kx+1}}{k(kx+1)}\leq\frac{1}{k^2}$ car $0\leq\alpha\leq1$. La série $\sum\frac{1}{k^2}$ ne dépend plus de x et converge (série de Riemann) .

Remarque : si k croit $k\to\alpha^{kx+1}$ décroît ($\alpha<1$) donc $\frac{1-\alpha^{kx+1}}{k(kx+1)}$ est le quotient de deux suites croissantes. Il se révèle difficile d'utiliser le théorème des séries alternées pour prouver la convergence uniforme.

De plus $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}(1-\alpha^{kx+1})}{k(kx+1)}\right)=\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ Donc grâce à la convergence uniforme :$\lim_{x\to+\infty}(u(x))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

$$\boxed{:\lim_{x\to+\infty}(u(x))=\frac{\pi^2}{12}}$$

III.3.a f est continue sur le segment $[\alpha,1]$ donc y est bornée (par M_α) $|\int_{\alpha}^{1}t^x f(t)dt|\leq M_\alpha\int_{\alpha}^{1}t^x dt=\frac{1}{x+1}M(1-\alpha^{x+1})\leq\frac{M}{x+1}\to0$. $\boxed{\int_{\alpha}^{1}t^x f(t)dt\to_{x\to+\infty}0}$

III.3.b On intègre par parties les fonctions (de t) f et $t\to\frac{t^{kx+1}}{kx+1}$ étant C^1 sur le segment $[\alpha,1]$:

, Donc $x\int_{\alpha}^{1}t^{kx}f(t)dt=\frac{xf(1)}{kx+1}-x\int_{\alpha}^{1}f'(t)\frac{t^{kx+1}}{kx+1}dt\to\frac{f(1)}{k}-0$.

$$\boxed{x\int_{\alpha}^{1}t^{kx}f(t)dt\to_{x\to+\infty}\frac{f(1)}{k}}$$

III.3.c On suppose $x>0$.

Comme on ne sait plus que f est positive , le critère des séries alternées ne s'applique plus.

Montrons que la série $\left|\int_{\alpha}^{1}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{kx}}{k}xf(t)dt\right|$ converge . On a :

$$\left|\int_{\alpha}^{1}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{kx}}{k}xf(t)dt\right|\leq\int_{\alpha}^{1}\frac{t^{kx}}{k}xM_\alpha dt\leq\frac{M_\alpha}{k^2}$$

qui est bien le terme général d'une série convergente.

$$x\int_{a}^{1}\ln(1+t^x)f(t)dt=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\int_{a}^{1}\frac{t^{kx}}{k}xf(t)dt$$

Or $\left|(-1)^{k+1}\int_{a}^{1}\frac{t^{kx}}{k}xf(t)dt\right|\leq\frac{M_\alpha}{k^2}$ ce qui assure comme au III2 la convergence uniforme de la série sur $[1,+\infty[$ et donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\int_{a}^{1}\frac{t^{kx}}{k}xf(t)dt\to\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{f(1)}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}f(1)$$

III.4.a Cas $b<1$: Dans ce cas M étant le maximum de $|f|$ continue sur $[a,b]$,

$n^p|I_n|\leq n^p\int_{a}^{b}Mt^n dt=Mn^p b^n(b-a)\to0$ quel que soit p, puisque l'exponentielle b^n l'emporte sur la puissance n^p ($0\leq b<1$)

III.4.b **Cas** $b=1$:

On intègre I_n par parties : $I_n=\int_{a}^{1}\frac{t^{n-1}dt}{1+t^n}tf(t)$. ce qui donne en posant $u(t)=tf(t)$, $v'(t)=\frac{t^{n-1}dt}{1+t^n}$ $I_n=\frac{f(1)\ln2}{n}-\frac{1}{n}\ln(1+a^n)af(a)-\frac{1}{n}\int_{a}(f(t)+tf'(t))\ln(1+t^n)dt$,

Le terme central $\frac{1}{n}\ln(1+a^n)af(a)\sim Ka^n/n$ tend vers 0 car $0\leq a<1$.

Pour le dernier on utilise (III.3.c) avec la fonction C^1 : $t\to(f(t)+tf'(t))$: , ce qui donne:

$$n\int_{a}^{1}\ln(1+t^n)\left(f(t)+tf'(t)\right)dt\to\left(f(1)+f'(1)\right)\frac{\pi^2}{12}$$

$$\boxed{I_n=\frac{f(1)\ln(2)}{n}-\frac{\left(f(1)+f'(1)\right)\pi^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

III.4.c **Cas** $a\geq1$ **:**

$I_n=\int_{a}^{b}\frac{t^n+1-1}{1+t^n}f(t)dt=\int_{a}^{b}f(t)dt-\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{1+t^n}dt$.

Si $a \geq 1$, le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans la seconde intégrale $\int_a^b \frac{f(t)}{1+t^n}dt$ donne $\int_a^b \frac{f(t)}{1+t^n}dt = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{u^n}{1+u^n}\frac{f(\frac{1}{u})}{u^2}du$.
Comme $\frac{1}{a} \leq 1$ on est ramené aux cas précédents avec $G(u) = \frac{f(\frac{1}{u})}{u^2}$, jouant le rôle de f.
• Si $a > 1$ alors $\lambda_1 = \int_a^b f(t)dt$,$\lambda = \mu = 0$, puisque l'intégrale $\int_a^b \frac{f(t)}{1+t^n}dt$ est négligeable devant tout $\frac{1}{n^p}$.
• Si $a = 1$ $\lambda_1 = \int_a^b f(t)dt, \lambda = -G(1)\ln 2 = -f(1)\ln 2$. Et $\mu = \left(\frac{\pi^2}{12}G(1) + G'(1)\right)$.
Or $G'(u) = -f'(\frac{1}{u})\frac{1}{u^4} - 2f(\frac{1}{u})\frac{1}{u^3}$ et $G'(1) = -f'(1) - 2f(1)$ et $\mu = -\frac{\pi^2}{12}(\mathbf{f(1)} + \mathbf{f'(1)})$.

$$\boxed{\text{Si } a = 1 \text{ , } I_n = \int_1^b f(t)dt - \frac{f(1)\ln(2)}{n} - \frac{\big(f(1)+f'(1)\big)\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

III.4.d pour $a < 1 < b$ **:** On scinde en deux I_n par Chasles, et on applique (4.b) et (4.d).
$I_n = \int_a^1 \frac{t^n}{1+t^n}f(t)dt + \int_b^1 \frac{t^n}{1+t^n}f(t)dt = \frac{f(1)\ln 2}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\frac{\pi^2}{12} + \int_1^b f(t)dt - f(1)\ln 2\frac{1}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\frac{\pi^2}{12} + o(\frac{1}{n^2})$, qui aprè réduction donne le résultat attendu:
$$\boxed{I_n = \int_1^b f(t)dt - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\frac{\pi^2}{6} + o(\frac{1}{n^2})}$$

III.5
Posons $K_n = \int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n}dt = \int_0^\gamma \frac{e^t(1+t^n-t^n)}{1+t^n}dt = e^\gamma - 1 - \int_0^\gamma \frac{t^ne^t}{1+t^n}dt$; L'intégrale $J_n = \int_0^\gamma \frac{t^ne^t}{1+t^n}dt$ est du type de I_n ave $f(t) = e^t$ qui est bien C^2.

$$\begin{cases} \text{Si } \gamma < 1 \text{ c'est le cas (4.a) et } J_n = o(\frac{1}{n^2}) \\ \text{Si } \gamma = 1 \text{ c'est le cas (4.b) et } J_n = \frac{e\ln 2}{n} - \frac{2e\pi^2}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ t \text{ Si } \gamma > 1 \text{ c'est le cas (4.c) et } J_n = \int_1^\gamma e^t dt - \frac{2e\pi^2}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = e^\gamma - e - \frac{2e\pi^2}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \end{cases}$$

Par suite :

$$K_n = \int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n}dt = \begin{cases} \text{Si } \gamma < 1 \ K_n = e^\gamma - 1 + o(\frac{1}{n^2}) \\ \text{Si } \gamma = 1 \ K_n = e - 1 - \frac{e\ln 2}{n} + \frac{2e\pi^2}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ \text{Si } \gamma > 1 \ K_n = e - 1 + \frac{e\pi^2}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \end{cases}$$

III.6.a Par Chasles $\int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n}dt = \int_0^{x_n(\alpha)} - \int_0^A = \alpha - \int_0^A \frac{e^t}{1+t^n}dt$; et il suffit de remplacer γ par A pour la deuxièm intégrale et les deux dernières lignes de l'accolade précédente. Le $e-1$ se réduit dans les deux cas et la limite est $\mathbf{0}$.
L'équivalent est alors le premier terme non nul : $\begin{cases} A = 1 : \int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n}dt \sim -\frac{e\ln(2)}{n} \\ A > 1 : \int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n}dt \sim \frac{e\pi^2}{3n^2} \end{cases}$
III.6.b On vient de voir que pour $A > 1$, $\int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n}dt \sim \frac{K}{n^2} > 0$, avec $K > 0$ indépendant de A, donc $x_n(\alpha) >$. ("positivité de l'intégrale") : donc $x_n(\alpha) > A$aussi grand que soit A et $\boxed{x_n(\alpha) \to +\infty}$(idem II4)
III.7
On a vu $\int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n}dt = e^\gamma - 1 + o(\frac{1}{n^2})$ pour $\gamma < 1$.
Comme $\ell < 1$, on a aussi :
$\int_0^\ell \frac{e^t}{1+t^n}dt = e^\ell - 1 + o(\frac{1}{n^2})$ et enfin $\int_0^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n}dt = \alpha = e - 1$;
Soit en retranchant :
$\int_\ell^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n}dt = e^\ell - 1 - \alpha + o(\frac{1}{n^2}) = o(\frac{1}{n^2})$;
Or le théorème de la moyenne donne : $(x_n(\alpha) - \ell)\frac{e^c}{1+c^n} = o(\frac{1}{n^2})$;
Mais comme $x_n(\alpha)$ tend vers $\ell < 1$, c^n tend vers 0 ; d'où le résultat demandé puisque $e^c \geq 1$.