ESIM 2001
MATH 2 PC / PSI

Lecture du sujet : Tout le problème étudie $A * B$ .Il faut donc comprendre rapidement de quoi il s'agit. Le sujet donne un exemple ; il n'est pas inutile d'en calculer d'autres . l'écriture avec l'exemple de $B * A$ montre - par exemple - que si $A * B$ et $B * A$ sont de même taille ce produit n'est pas commutatif.
On peut remarquer $I_n * I_p = I_{np}$
On remarque que les colonnes de $A * B$ sont construites à partir de celles de A et *B . De façon plus précise la première colonne de $A * B$ est $C_1(A) * C_1(B)$, la seconde $C_1(A) * C_2(B)$ et plus généralement*

$$C_{(i-1)p+j}(A * B) = C_i(A) * C_j(B)$$

*Il est indispensable de soigner son écriture. Le correcteur a besoin de distinguer rapidement le produit * ici introduit du produit matriciel usuel.*
*La première partie étudie quelques propriétés (,relation entre * et . , nilpotence , inversibilité).L'exemple du 4.b éclaire peu le début car l'inverse de la matrice 6x6 est pénible à calculer directement. Il servira toutefois de vérification.*
*La seconde partie étudie la diagonalisation de A,B,A*B. L'exemple 1c peut se traiter à la main sans utiliser la loi * si on remarque que la matrice est de rang 2. Le calcul des éléments propres de $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de la matrice du sujet donne une idée , ou permet de vérifier les résultats précédents .*

PRELIMINAIRE

poser le calcul par bloc.

Partie I.

1)Si A ou B est nul , tous les blocs de $A * B$ sont nuls et donc $A * B = 0$.
Réciproquement soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ tels que $A * B = 0$.Si A est non nul il existe un coefficient $a_{i,j}$ non nul . Dans la matrice $A * B$ figure alors le bloc $a_{i,j}B$. Comme $A * B$ est nul , ce bloc est nul donc comme $a_{i,j} \neq 0$ on a bien $B = 0$

$$\boxed{A * B = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)}$$

2)
a)Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$ et $Y \in \mathbb{K}^p$.
On a alors $A * B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $X * Y \in \mathbb{K}^{np}$. Les tailles sont compatibles et le produit est défini.

On a $A * B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix}$ et $X * Y = \begin{pmatrix} x_1Y \\ x_2Y \\ \vdots \\ x_nY \end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs donne $(A * B).(X * Y) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j}x_jBY \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j}x_jBY \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j}x_jBY \end{pmatrix} = (A.X) * (B.Y)$.

$$\boxed{(A * B).(X * Y) = (A.X) * (B.Y)}$$

b)

Pour $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B, B' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on a $A * B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix}$ et

$A' * B' = \begin{pmatrix} a'_{1,1}B' & a'_{1,2}B' & \dots & a'_{1,n}B' \\ a'_{2,1}B' & a'_{2,2}B' & \dots & a'_{2,n}B' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n,1}B' & a'_{n,2}B' & \dots & a'_{n,n}B' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

D'après les règles du produit matriciel on a $C_k(M.N) = M.C_k(N)$
La colonne $(i-1)p + j$ de $(A * B).(A' * B')$ est obtenu en calculant $(A * B).(C_i(A') * C_j(B'))$. Cette colonne est donc d'après **2.a** $(A.C_i(A')) * (B.C_j(B')) = C_i(A.A') * C_j(B.B')$ .C'est donc la colonne d'indice $(i-1)p + j$ de $(A.A') * (B.B')$

$$\boxed{(A * B).(A' * B') = (A.A') * (B.B').}$$

3)Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Pour tout entier $k \geq 2$, on a par récurrence d'après **2.b.**, $(A*B)^k = (A^k)*(B^k)$. Ainsi

$$\begin{aligned} A*B \text{ nilpotente} &\Leftrightarrow \exists k \geq 1, \quad (A*B)^k = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \geq 1, \quad A^k = 0 \text{ ou } B^k = 0 \quad (\text{question } \mathbf{1}) \\ &\Leftrightarrow A \text{ nilpotente ou } B \text{ nilpotente.} \end{aligned}$$

4)
a)On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont inversibles.
D'après **2.b.**, on a $(A*B).(A^{-1}*B^{-1}) = (A.A^{-1})*(B.B^{-1}) = I_n * I_p = I_{np}$.
Il en résulte que $A*B$ est inversible, et $(A*B)^{-1} = (A^{-1})*(B^{-1})$.

b)La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $M = A*B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices inversibles. D'après **a.**, M est donc inversible et

$$M^{-1} = (A^{-1})*(B^{-1}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5)

a)Le calcul donne $J_n(r)*J_p(s) = \begin{pmatrix} J_p(s) & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & J_p(s) & & & \\ & & & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice $J_n(r)*J_p(s)$ est une matrice diagonale. Le rang est donc le nombre de coefficients diagonaux non nuls soit $\boxed{rg J_n(r)*J_p(s) = rs}$

b)Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de rangs respectifs r et s. Alors A et B sont respectivement équivalentes à $J_n(r)$ et $J_p(s)$: il existe $P_1, Q_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P_2, Q_2 \in GL_p(\mathbb{K})$ tels que

$$A = P_1.J_n(r).Q_1 \text{ et } B = P_2.J_p(s).Q_2.$$

En utilisant **2.b.** on obtient $A*B = (P_1*P_2).(J_n(r)*J_p(s)).(Q_1*Q_2)$. D'après **4.a** les matrices (P_1*P_2) et (Q_1*Q_2) sont inversibles. Il en résulte que $A*B$ est équivalente à la matrice $J_n(r)*J_p(s)$ de rang rs, elle est donc de rang rs.

$$\boxed{rg(A*B) = rg(A)rg(B)}$$

c)Si $A*B$ est inversible, alors $\text{rg}(A*B) = np$.
Si $rg(A) < n$ alors comme $rg(B) \leq p$ on a $rg\,(A*B) < np$. Absurde . Donc A est inversible.
Idem pour B .
La réciproque a été montrée à la question 4 .

$$\boxed{A*B \text{ inversible ssi } A \text{ et } B \text{ inversibles.}}$$

6)
a)
Le vecteur $U_i * V_j$ a tous ses coefficients nuls, à l'exception du $(i-1)p+j$-ème qui est égal à 1. A i fixé

$$\begin{gathered} j -> (i-1)p+j \\ [1,p] -> [[(i-1)p+1, ip]] \end{gathered}$$

est bijective . Donc

$$\begin{gathered} (i,j) -> (i-1)p+j \\ [1,n] \times [1,p] -> [[1,np]] \end{gathered}$$

est aussi bijective . $U_i * V_j = W_{(i-1)p+j}$ est donc dans la base canonique de $\mathbb{K}^{np}$et on a tous les vecteurs de base une fois et une seule.

b)Pour $i \in [1,n]$ et $j \in [1,p]$, on a, d'après **2.a.**, $(A*B).(U_i*V_j) = (A.U_i)*(B.V_j)$.

Par ailleurs, $A.U_i = C_i(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,i}U_k$ et $B.V_j = C_j(B) = \sum_{l=1}^p b_{l,j}V_l$. Il en résulte, par bilinéarité de $*$, que $(A*B).(U_i*V_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,i}\left(\sum_{l=1}^p b_{l,j}U_k*V_l\right) = \sum_{l=1}^p b_{l,j}\left(\sum_{k=1}^n a_{k,i}U_k*V_l\right)$ en changeant l'ordre des indices. .
On peut alors interprété $A*B$ comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}^{np}$ exprimé dans la base

$$\mathcal{B} = (U_1*V_1, U_1*V_2\cdots, U_1*V_p, U_2*V_1, \cdots, U_n*V_p)$$

sachant que U_i*V_j est le $(i-1)p+j$ -ème vecteur de base la colonne $(i-1)p+j$ permet alors de calculer:

$$(A*B).(U_i*V_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,i}\left(\sum_{l=1}^p b_{l,j}U_k*V_l\right) = \begin{pmatrix} a_{1i}b_{1,j} & (\text{sur } U_1*V_1) \\ \vdots & \\ a_{1,i}b_{p,j} & (\text{sur } U_1*V_p) \\ a_{2,i}b_{1,j} & (\text{sur } U_2*V_1) \\ \vdots & \\ a_{2,i}b_{P,j} & (\text{sur } U_2*V_p) \\ \vdots & \\ a_{n,i}b_{p,j} & (\text{sur } U_n*V_p) \end{pmatrix}$$

On peut chercher à exprimer cet endomorphisme dans la base

$$\mathcal{B}' = (U_1*V_1, \ldots, U_n*V_1, \ldots, U_1*V_p, \ldots, U_n*V_p).$$

base dans la quelle U_i*V_j est le $(j-1)n+i-me$ vecteur de base.
En changeant l'ordre de la sommation, on a vu que $(A*B).(U_i*V_j) = \sum_{l=1}^p b_{l,j}\left(\sum_{k=1}^n a_{k,i}U_k*V_l\right)$. qui correspond à une écriture dans la base $\mathcal{B}' = (U_1*V_1, \ldots, U_n*V_1, \ldots, U_1*V_p, \ldots, U_n*V_p)$.
L'image, par l'endomorphisme associé à $A*B$, du $(j-1)n+i$-ème vecteur de $\mathcal{B}'$ est, dans la base $\mathcal{B}'$, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_{1i}b_{1,j} & (\text{sur } U_1*V_1) \\ \vdots & \\ a_{n,i}b_{1,j} & (\text{sur } U_n*V_1) \\ a_{1,i}b_{2,j} & (\text{sur } U_1*V_2) \\ \vdots & \\ a_{n,i}b_{2,j} & (\text{sur } U_n*V_2) \\ \vdots & \\ a_{n,i}b_{p,j} & (\text{sur } U_n*V_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,j}C_i(A) \\ b_{2,j}C_i(A) \\ \vdots \\ b_{p,j}C_i(A) \end{pmatrix} = C_j(B)*C_i(A).$
Il en résulte que la matrice associée à $A*B$ dans la base $\mathcal{B}'$ est $B*A$.
Remarque : essayer avec $n=2$ et $p+2$ *pour voir ce qu'il se passe.*
c)Les deux matrices sont donc semblables et la traduction matricielle du changement de bases s'écrit

$$\boxed{B*A = P^{-1}(A*B)P}$$

Remarque : 5/2 le sujet demandait aussi de montrer que la matrice de passage est orthogonal.

Partie II

1)
a)Soit $X \in \mathbb{K}^n$ un vecteur propre de A pour la valeur propre λ et $Y \in \mathbb{K}^p$ un vecteur propre de B pour la valeur propre μ.
Comme au **I 1** on montre que $X*Y \in \mathbb{K}^{np}$ est un vecteur non nul et d'après **I 2** :

$$(A*B).(X*Y) = (A.X)*(B.Y) = (\lambda X)*(\mu Y) = \lambda\mu X*Y.$$

Ainsi, $\boxed{X*Y \text{ un vecteur propre de } A*B \text{ pour la valeur propre } \lambda\mu.}$
b)On suppose que A et B sont diagonalisables.
Il existe deux matrices diagonales D et D' et deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = QD'Q^{-1}$. . d'après **I 2** $A*B = (P*Q)(D*D')(P^{-1}*Q^{-1})$. Soit d'après **I 4** $A*B = (P*Q)(D*D')(P*Q)^{-1}$. Comme $P*Q$ est inversible (**I 4**) et $D*D'$ diagonale de coefficients $d_id'_j$:

$$\boxed{(A,B) \text{ diagonalisable} \Rightarrow (A*B) \text{ diagonalisable et } sp(A*B) = Sp(A).Sp(B)}$$

Une base de vecteurs propres est donnée par les colonnes de $P*Q$ donc par les vecteurs C_i*D_j où C_i est un vecteur propre de A et D_j un vecteur propre de B .
c)La matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $M = A*B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- – La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour $\lambda_1 = 2$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour $\lambda_2 = 0$.
  La matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour $\mu_1 = -1$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour $\mu_2 = 1$.
  D'après **b.**, M est donc diagonalisable avec $Sp(M) = \{-2, 2, 0\}$ et
  $E_M(-2)$ =Vect$(U_1 * V_1)$, $E_M(2)$ =Vect$(U_1 * V_2)$, $E_M(0)$ =Vect$(U_2 * V_1, U_2 * V_2)$ où

$$U_1 * V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_1 * V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 * V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 * V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2)
a)Soit U un vecteur propre de A pour la valeur propre λ.
L'ensemble $U * \mathbb{K}^p = \{U * Y \,/\, Y \in \mathbb{K}^p\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{np}$: non vide stable par combinaison linéaire .(à rédiger)
Pour tout $Y \in \mathbb{K}^p$, on a $(A * B).(U * Y) = (A.U) * (B.Y) = (\lambda U) * (B.Y) = \lambda\,(U * (B.Y)) = U * \lambda(B.Y)$.
Ainsi comme $\lambda(B.Y) \in \mathbb{K}^p$, $U * \mathbb{K}^p$ est stable par $A * B$.
b)Soit U_0 un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_0.
D'après **a.**, $U_0 * \mathbb{K}^p$ est stable par $A * B$, donc la restriction à $U_0 * \mathbb{K}^p$ de l'endomorphisme associé à $A * B$ est diagonalisable. Il existe donc une base composée de vecteurs propres. De plus $(Y- > U_O Y)$ est un isomorphisme:

- linéarité d'après le prologue
- noyau réduit à zéro : $U_0 * Y = 0$ et $U_0 \neq 0$ implique $Y = 0$ d'après **1 1.**

La base de vecteurs propres est donc de cardinal p .
Notons $(U_0 * V_1, \dots, U_0 * V_p)$ la base de vecteurs propres de $U_0 * \mathbb{K}^p$, composée de vecteurs propres de $A * B$ pour des valeurs propres $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.
Pour tout $j \in [1, p]$, on a

$$(A * B).(U_0 * V_j) = \alpha_j(U_0 * V_j) = U_0 * (\alpha_j V_j)$$

Donc d'après **I 2 :**

$$(AU_0) * (BV_j) = U_0 * (\alpha_j V_j)$$

or $AU_0 = \lambda_0 U_0$. Donc $(\lambda_0 U_0) * (BV_j) = U_0 * (\alpha_j V_j)$
La relation $U_0 * (\alpha_j V_j) - U_0 * (\lambda_0 B.V_j) = U_0 * (\alpha_j V_j - \lambda_0 B.V_j) = 0$, combinée avec **I 1 (** comme $U_0 \neq 0$ **)** donne $\alpha_j V_j - \lambda_0 B.V_j = 0$. Il en résulte que $(V_1, \dots, V_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$, composée de vecteurs propres de B pour les valeurs propres $\frac{\alpha_1}{\lambda_0}, \dots, \frac{\alpha_p}{\lambda_0}$.
C'est une base car $\sum \lambda_i V_i = 0 \Rightarrow \sum \lambda_i\,(U_0 * V_i) = 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0$
Ainsi, $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$
3)Si 0 est la seule valeur propre de A alors d'après **II 1** 0 est la seule valeur propre de $A * B$. Donc comme $A * B$ est diagonalisable $A * B = P.0.P^{-1} = 0$. Absurde
Donc A admet une valeur propre non nul alors B est diagonalisable d'après la question précédente.
Comme $A*B$ et $B*A$ sont semblables on a que B admet une valeur propre non nul puis que A est diagonalisable.

$$\boxed{A * B \text{ non nul , } \mathbb{K} = \mathbb{C}\text{: } A * B \text{ diagonalisable ssi } A \text{ et } B \text{ diagonalisables}}$$

4)Supposons que A soit diagonalisable. Comme $A \neq 0$ (sinon $A * B = 0$), il en résulte que $Sp_{\mathbb{R}}(A)$ contient une valeur propre non nulle(par le même argument qu'à la question précédente). Ainsi, d'après **2.b.**, B est diagonalisable .
Si B est diagonalisable, alors $Sp_{\mathbb{R}}(B)$ contient une valeur propre non nulle. Le même raisonnement appliqué à $B * A$ permet d'établir que A est diagonalisable.
5)
a)Si A admet une valeur propre réelle non nulle, alors, d'après **2.b.**, B est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$) ; ce qui est contraire à l'hypothèse.
On établit, de la même manière, que B n'admet pas de valeur propre réelle non nulle.
b)Soient $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mu \in Sp_{\mathbb{C}}(B)$ non nulles.
D'après **1.a.**, on a $\lambda\mu \in Sp_{\mathbb{C}}(A * B)$. Comme $A * B$ est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$), les valeurs propres de $A * B$ sont réels ainsi $\lambda\mu$ est un réel non nul.
Comme B est une matrice réelle, on a $\overline{\mu} \in Sp_{\mathbb{C}}(B)$. Ainsi, de la même manière, on établit que $\lambda\overline{\mu}$ est un réel non nul.
Il en résulte que $\lambda\mu\,\lambda\overline{\mu} = \lambda^2|\mu|^2 \in \mathbb{R}$ avec $|\mu|^2 > 0$, ainsi λ^2 est un réel.

De même, en utilisant $\overline{\lambda}\mu$, on établit que μ^2 est un réel.
Donc A et B admettent des valeurs propres non nulles, qui sont des imaginaires purs (et leur conjugués), et éventuellement la valeur propre 0.

c) Soient $i\alpha \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ avec $\alpha > 0$ et X un vecteur propre associé.
On a $A.X = i\alpha X$ et $A.\overline{X} = -i\alpha\overline{X}$.
X et $\overline{X}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$.:Si on suppose $\overline{X} = kX$ on a aussi en appliquant A, $\overline{X} = -kX$ donc $k = 0$ et $\overline{X} = 0$ ce qui est absurde .
Il en résulte que les vecteurs (réels) $X + \overline{X}$ et $i(X - \overline{X})$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$: s'il existe deux réels a et b tels que $a\left(X + \overline{X}\right) + bi(X - \overline{X}) = 0$ on a $(a + bi) = (a - ib) = 0$ donc $a = b = 0$.
Le calcul donne $A.(X + \overline{X}) = \alpha i(X - \overline{X})$ et $A.i(X - \overline{X}) = -\alpha(X + \overline{X})$.
Le plan $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X + \overline{X}, i(X - \overline{X})\right)$ est donc stable par A et la matrice de l'endomorphisme induit par A dans la base $(X + \overline{X}, i(X - \overline{X}))$ est αS où $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) D'après **3.**, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On a $(X_1, \overline{X}_1, X_2, \overline{X}_2, \ldots, X_r, \overline{X}_r)$ un système libre de $\mathbb{C}^n$ composée de vecteurs propres de A pour les valeurs propres $i\alpha_1, -i\alpha_1, i\alpha_2, -i\alpha_2, \ldots, i\alpha_r, -i\alpha_r$ et 0 d'ordre $n - 2r$ où $r > 0$ et $\alpha_k > 0$ pour $k \in [1, r]$.
On vérifie aisément que la famille de vecteurs (réels)

$$(X_1 + \overline{X}_1, i(X_1 - \overline{X}_1), X_2 + \overline{X}_2, i(X_2 - \overline{X}_2), \ldots, X_r + \overline{X}_r, i(X_r - \overline{X}_r))$$

est linéairement indépendante dans $\mathbb{R}^n$:
Soit $\sum_{j=1}^{r}\left(a_j\left(X_j + \overline{X_j}\right) + b_j i\left(X_j - \overline{X_j}\right)\right) = 0$ avec $(a_j, b_j) \in \mathbb{R}^{2r}$. On regroupe les termes en X_p et $\overline{X_p}$. On a alors comme la famille est libre dans $\mathbb{C}^n$ $\forall j$: $a_j + ib_j = a_j - ib_j = 0$ donc $\forall j$: $a_j = b_j = 0$
Il existe aussi une base réelle $(X'_{2r+1}, \ldots, X'_n)$ de $\ker(A)$, sous espace de $\mathbb{R}^n$.
Montrons que la famille $\mathcal{B}_0$ suivante est une base de $\mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{B}_0 = (X_1 + \overline{X}_1, i(X_1 - \overline{X}_1), \ldots, X_r + \overline{X}_r, i(X_r - \overline{X}_r), X'_{2r+1}, \ldots, X'_n)$$

En effet, soit

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{r} u_k(X_k + \overline{X}_k) + v_k i(X_k - \overline{X}_k) + \sum_{l=2r+1}^{n} w_l X'_l = 0$$

avec $u_k, v_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in [1, r]$ et $w_l \in \mathbb{R}$ pour $l \in [2r + 1, n]$.
L'image de (1) par A donne $\sum_{k=1}^{r} u_k\alpha_k i(X_k - \overline{X}_k) - v_k\alpha_k(X_k + \overline{X}_k) = 0$.
La famille $(X_1 + \overline{X}_1, i(X_1 - \overline{X}_1), \ldots, X_r + \overline{X}_r, i(X_r - \overline{X}_r))$ étant llibre et $\alpha_k > 0$ pour tout k, il en résulte que $u_k = v_k = 0$ pour tout k. En reportant dans (1), on obtient $w_l = 0$ pour tout l.
D'après le résultat établi en **c.**, la matrice associée à A dans la base $\mathcal{B}_0$ s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 S & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha_r S & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

D'après **3.**, B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
De manière totalement analogue, on établit l'existence de $s > 0$ et $\beta_k > 0$ pour $k \in [1, s]$ tels que B soit semblable, dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, à la matrice antisymétrique

$$\begin{pmatrix} \beta_1 S & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \beta_s S & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0_{p-2s} \end{pmatrix}.$$

6)

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on a $M * N = \begin{pmatrix} m_{1,1}N & m_{1,2}N & \ldots & m_{1,n}N \\ m_{2,1}N & m_{2,2}N & \ldots & m_{2,n}N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1}N & m_{n,2}N & \ldots & m_{n,n}N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Ainsi,${}^t(M * N) = \begin{pmatrix} m_{1,1}{}^tN & m_{2,1}{}^tN & \ldots & m_{n,1}{}^tN \\ m_{1,2}{}^tN & m_{2,2}{}^tN & \ldots & m_{n,2}{}^tN \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{1,n}{}^tN & m_{2,n}{}^tN & \ldots & m_{n,n}{}^tN \end{pmatrix} = ({}^tM) * ({}^tN)$.

7)Soit M' et N' les matrices antisymétriques semblables à M et N .Il suffit de prouver les résultats demandés pour M' et N'.
a)Soit λ une valeur propre de M' et X' un vecteur propre associé. On a $M'X' = \lambda X'$.
Pour introduire l'antisymétrie utilisons la transposition :${}^tX'^tM' = \lambda^tX'$. donc ${}^tX'M' = -\lambda^tX'$.
Si on calcul de deux façons différentes ${}^tX'M'X'$ on obtient $\lambda^tX'X' = -\lambda^tX'X$. Or ${}^tX'X' = \sum x_i'^2 \neq 0$ donc $\lambda = 0$
Si M' est diagonalisable, alors M' est semblable à 0_n, donc nulle; ce qui est contraire à l'hypothèse.
De même, la matrice N' ne peut pas être diagonalisable.
b)D'après **6.**, on a ${}^t(M' * N') = ({}^tM') * ({}^tN') = (-M') * (-N') = M' * N'$.
Ainsi, $M' * N'$ est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Et $M * N$, matrice semblable à $M' * N'$