EPITA 2000

Transformée de Fourier

remarques sur le sujet:

- la question 2 donne toutes les réponses . Il est donc possible de les admettre pour passer à la suite en particulier pour traiter l'exemple de la question 3 .
- par contre la question 4 ne donne pas de réponse et est indispensable pour le deuxième exemple. La question 5 dépend aussi de la question 1 (le sujet le dit) mais on peut toujours exprimer F(0) donc aussi F en fonction de I même sans avoir fait la question 1 .
- Le sujet ne dit pas que la calculatrice est interdite. Il est probable que votre calculatrice connaisse la valeur de I . Essayer aussi les deux exemples (MAPLE sait le faire). Si vous pouvez avoir le résultat final avant de commencer les calculs vous pouvez les vérifier .en particulier vérifier les deux équations différentielles avant de rédiger la fin de questions.

1a) G est une intégrale dépendant d'un paramètre.Comme on intègre sur un segment , il est inutile de dominer.
La fonction $(x,u) -> \frac{\exp-(x^2(1+u^2))}{1+u^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ comme quotient de fonction C^1 à dénominateur jamais nul. Donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$G'(x) = \int_0^1 (-2x)\, e^{-x^2(1+u^2)} du$$

$h(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$ est une primitive de la fonction continue $u -> e^{-u^2}$. h est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^{-x^2}$.
Comme $H = h^2$, H est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $H' = 2hh'$ donc

$$H'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Le changement de variable $u = tx$ C^1 pour $t \in [0,1]$ donne $H'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} x dt = -G'(x)$.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) + G'(x) = 0$. En intégrant on en déduit que $H + G$ est constante. Or $H(0) = 0$ et $G(0) = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = [Arc\tan(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ Donc

$$\boxed{H + G = \frac{\pi}{4}}$$

1b)G est une fonction positive comme intégrale d'une fonction positive , les bornes étant dans le bon sens.
De plus comme $e^{-x^2u^2} \leq 1$ on a $G(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$. Donc par encadrement : $\lim_{+\infty}(G) = 0$.
Et donc comme $G + H = \pi/4$ on a $\lim_{+\infty}(H) = \pi/4$.
On a donc $\int_0^{\rightarrow+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Comme la fonction $u -> e^{-u^2}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ l'existence de la limite est équivalente à l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

2a) Pour tout x réel on pose $f_x(t) = e^{-2i\pi xt} f(t)$. La fonction f_x est alors continue sur $\mathbb{R}$ et $|f_x| = |f|$ fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. f_x est donc une fonction continue majorée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

2b) On a pour tout réel x :$|F(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f_x(t)dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_x| = \int_{\mathbb{R}} |f|$ quantité qui est bien définie (f est intégrable sur $\mathbb{R}$) et indépendante de x .

$$\boxed{F \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

2c)
Soit $\phi(x,t) = e^{-2i\pi xt} f(t)$. ϕ est une fonction continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dominée par la fonction $|f|$ continue , intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x . Donc $F = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,t)dt$ et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

2d) Avec les notation de cette question la majoration du **2b** devient $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_1$
$T(f)$ est bien définie pour toute fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a bien $T(f) \in C_b(\mathbb{R})$ d'après **2b** et **2c**.
T est linéaire par linéarité du produit par $e^{-2i\pi xt}$ et linéarité de l'intégrale.
Enfin

$$\|Tg_1 - Tg_2\|_\infty = \|T(g_1 - g_2)\|_\infty \leq \|g_1 - g_2\|_1$$

$$\boxed{T \text{ est linéaire } 1-\text{lipschitzienne de } L^1(\mathbb{R}) \text{ dans } C_b(\mathbb{R})}$$

3) On vérifie avant toute chose que la fonction f : $t -> \frac{1}{1+t^2}$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}$:

- continue sans problème comme inverse d'une fonction continue à dénominateur non nul.

- intégrable sur $[0,1]$ car continue sur le segment.

- intégrable sur $[1,+\infty[$ car équivalente en $+\infty$ à $\frac{1}{t^2}$

La fonction F est donc continue sur $\mathbb{R}$ majorée par $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\pi$

3a) Sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ on peut poser pour $x\neq 0$ $u(t)=\frac{-1}{2i\pi x}e^{-2i\pi tx}$ et $v(t)=\frac{1}{1+t^2}$. Les fonctions u et v sont C^1 sur $[a,b]$. et donc :

$$\int_a^b\frac{e^{-2i\pi xt}}{1+t^2}dt=\frac{-1}{2i\pi x}\left[\frac{e^{-2i\pi xb}}{1+b^2}-\frac{e^{-2i\pi xa}}{1+a^2}\right]+\frac{1}{2i\pi x}\int_a^b\frac{-2te^{-2i\pi tx}}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

Pour tout x réel la fonction $t->\frac{-2te^{-2i\pi tx}}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ majorée en module par $\phi(t)=\frac{2|t|}{(1+t^2)^2}$. La fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ car équivalente à $\frac{1}{|t|^3}$ en $\pm\infty$. On peut donc passer à la limite dans l'intégration par partie .Or

$$\left|\frac{e^{-2i\pi xb}}{1+b^2}\right|\leq\frac{1}{1+b^2}\rightarrow_{b\rightarrow+\infty}0\text{ , et }\left|\frac{e^{-2i\pi xa}}{1+a^2}\right|\leq\frac{1}{1+a^2}\rightarrow_{a\rightarrow-\infty}0$$

d'où :

$$\boxed{\forall x\neq 0\ ,\ F(x)=\frac{1}{i\pi x}\int_{\mathbb{R}}\frac{-te^{-2i\pi tx}}{(1+t^2)^2}dt}$$

comme $\frac{1}{i}=-i$ on a la relation voulue pour $x\neq 0$ en multipliant par πx .
Pour $x=0$ le membre de gauche est continue car F est continue. Le membre de droite est aussi continue car $\psi(x,t)=\frac{te^{-2i\pi tx}}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ dominée par $\phi(t)=\frac{2|t|}{(1+t^2)^2}$ continue intégrable sur $\mathbb{R}$. L'égalité est donc vraie en $x=0$ par continuité.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\pi xF(x)=i\int_{\mathbb{R}}\frac{te^{-2i\pi tx}}{(1+t^2)^2}dt}$$

Le membre de droite est la transformée de Fourier de la fonction continue intégrable $t->\frac{it}{(1+t^2)^2}$. D'après **1d)** il est donc majoré en module par $\int_{\mathbb{R}}\frac{|t|}{(1+t^2)^2dt}=2\int_0^{\rightarrow+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^2}dt=2\left[\frac{1}{2(1+t^2)}\right]_0^{\rightarrow+\infty}=1$

$$\boxed{\forall x\neq 0\ ,\ |F(x)|\leq\frac{1}{\pi|x|}}$$

A noter l'erreur de texte : x doit être non nul pour que l'expression soit définie.
On a donc

$$\boxed{\lim_{\pm\infty}(F)=0}$$

3b) Soit $\theta(x,t)=\frac{te^{-2i\pi tx}}{(1+t^2)^2}$.θ vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$:

- $\theta\in C^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}\right)$ .comme produit et quotient à dénominateur non nul de telles fonctions.

- Avec les notations du **3a)** θ est dominée par la fonction ϕ continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x .

- $\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t)=-2i\pi\frac{t^2e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}$ est dominée par $2\pi\frac{t^2}{(1+t^2)^2}$, donc par $\frac{2\pi}{(1+t^2)}$ continue , intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x .

La fonction $\Theta(x)=\int_{\mathbb{R}}\theta(x,t)dt$ est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t)dt=-2i\pi\int_{\mathbb{R}}\frac{t^2e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}dt.$
Comme $F(x)=\frac{i\Theta(x)}{\pi x}$ la fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient à dénominateur non nul de fonctions C^1 .
En dérivant la relation (1) et en simplifiant par π on a donc :

$$F(x)+xF'(x)=2\int_{\mathbb{R}}\frac{t^2e^{-2i\pi xt}}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

Or $t^2=(1+t^2)-1$ donc :

$$F(x)+xF'(x)=2\left(F(x)-\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2i\pi xt}}{\left(1+t^2\right)^2}dt\right)$$

D'où par changement de membre :

$$\boxed{F(x)-xF'(x)=2\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}dt}$$

3c) On pose maintenant $\gamma(x,t)=\frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}$ et $\Gamma(x)=\int_{\mathbb{R}}\gamma(x,t)dt.$

- La fonction γ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$

- $|\gamma(x,t)| \leq \frac{1}{(1+t^2)^2}$ indépendant de x, continue intégrable sur $\mathbb{R}$ car équivalent à $\frac{1}{t^4}$ en $\pm\infty$
- $\left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2\pi\frac{|t|}{(1+t^2)^2}$ indépendant de x, continue intégrable sur $\mathbb{R}$ car équivalent à $\frac{1}{|t|^3}$ en $\pm\infty$

Γ est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc $F'^{(x)} = \frac{F(x)-2\Gamma(x)}{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
En dérivant la relation (2) on déduit :

$$xF"(x) = 4i\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{te^{-2i\pi tx}}{(1+t^2)^2}dt$$

On retrouve l'expression du **3a) :** $xF"(x) = 4\pi^2 xF(x)$. Soit en simplifiant par x :

$$\boxed{F" = 4\pi^2 F}$$

3d) On a $F(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$

- Sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a d'après l'équation différentielle $F(x) = Ae^{-2\pi x} + Be^{2\pi x}$. Comme $\lim_{+\infty}(F) = 0$ on a $B = 0$ puis, comme les deux membres sont continues en 0 et que $F(0) = \pi$ on a $A = \pi$:

$$x \geq 0 \ , \ F(x) = \pi e^{-\pi x}$$

- Sur $\mathbb{R}^{-*}$ on a d'après l'équation différentielle $F(x) = Ae^{-2\pi x} + Be^{2\pi x}$. Comme $\lim_{-\infty}(F) = 0$ on a $A = 0$ puis par continuité comme $F(0) = \pi$ on a $B = \pi$:

$$x \geq 0 \ , \ F(x) = \pi e^{\pi x}$$

4a) En reprenant les notations de la question **2c) o**n a déjà que $\phi(x,t) = e^{-2i\pi xt}f(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ dominée par la fonction f continue , intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x .De plus ϕ est bien C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial\phi}{\partial x} = (-2i\pi)e^{-2i\pi xt}\,(tf(t))$ est dominée par $2\pi\,|tf(t)|$ fonction continue , indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. F est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver sous le signe $\int$.

$$\boxed{\text{si } tf(t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ , } F \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \text{ et } F' = -2i\pi T(t->tf(t))}$$

De façon plus générale si la fonction $t->t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $p < k$ la fonction $t->t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ $\left(\text{car } |t^p f(t)| \ll_{+\infty} \left|t^k f(t)\right|\right)$. Donc la dérivée $\frac{\partial^p\phi}{\partial x^p} = (-2i\pi)^p e^{-2i\pi xt}\,(t^p f(t))$ est dominée par $|t^p f(t)|$ continue,intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendante de x . donc

$$\boxed{F \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{C}) \text{ et } (T(f))^{(k)} = (-2i\pi)^k T(t->t^k f(t))}$$

Remarque l'exemple de la question 3) montre que le résultat peut-être faux si on retire l'hypothèse d'intégrabilité. Dans cet exemple F n'est pas dérivable en 0 . Mais $tf(t)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
4b) Si f' est intégrable sur $\mathbb{R}$ $f(t) = f(0) + \int_0^t f'$ admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Si cette limite est non nulle alors f est équivalente à sa limite et n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{(f \text{ et } f' \text{ intégrables sur } \mathbb{R}) \Rightarrow (\lim_{\pm\infty}(f) = 0)}$$

On a alors $T(f') = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt}f'(t)dt$ que l'on va intégrer par partie en posant $u(t) = f(t)$ et $v(t) = e^{-2i\pi xt}$. Les fonctions u et v sont bien C^1 sur $\mathbb{R}$. $u'v = e^{-2i\pi xt}f'(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $uv' = (-2i\pi x)\,e^{-2i\pi xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car proportionnel à la transformée de Fourier de la fonction intégrable f . Enfin $|uv| = |f|$ a une limite nulle quand t tend vers $\pm\infty$. En intégrant sur un segment et en passant à la limite comme au **3a)** on a :

$$\boxed{T(f') = 2i\pi xT(f)}$$

Par récurrence on a alors :

$$\boxed{\left(\forall p \leq k, f^{(k)} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}\right) \Rightarrow \left(T(f^{(k)}) = (2i\pi x)^k T(f)\right)}$$

5)La fonction $f(t) = e^{-\pi t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, f ,$tf(t)$ et $f' = -2\pi te^{-\pi t^2}$ sont négligeables en $\pm\infty$ devant $e^{-|t|}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer les résultats du **4a)** et du **4b)**.
5a) On a la relation $f'(t) = -2\pi tf(t)$ donc par linéarité de la transformée de Fourier :$T(f') = -2\pi T(t->tf(t))$. Mais d'après la question précédente $T(f') = 2i\pi xT(f)$. Donc $ixT(f) = T(t->tf(t))$. On a aussi montrer que $(T(f))' = -2i\pi T(t->tf(t))$ donc : $\boxed{-2\pi xT(f) = (T(f))'}$
5b) Comme le coefficient de $(T(f))'$ est toujours non nul on peut intégrer l'équation sur $\mathbb{R}$.

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \ , \ T(f)(x) = Ke^{-\pi x^2}$$

Or $F(0)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi t^2}dt=\int_{\mathbb{R}}e^{-(\sqrt{\pi}t)^2dt}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-v^2}dv$ par changement de variable affine $v=\sqrt{\pi}t$. Par parité de la fonction on a donc : $F(0)=2\int_{\mathbb{R}^+}e^{-v^2}dv=1$.

$$\boxed{F(x)=e^{-\pi x^2}}$$

Dans les deux exemples on part d'une fonction f réelle pour trouver une fonction F réelle . Ce n'est pas toujours le cas . C'est une conséquence du fait que les deux fonctions f prises en exemple sont paires.

6) Toute la question a pour but d'étudier la limite en $+\infty$. On supposera donc $x>0$ sans chercher à traiter le cas particulier $x=0$.

6a) On a :

$$\int_{-A}^{A}e^{-2i\pi xt}\phi(t)dt=\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}e^{-2i\pi xt}\phi_k dt=\sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{e^{-2i\pi xt}}{-2i\pi x}\right]_{a_k}^{a_{k+1}}\phi_k$$

chaque terme de la somme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A}e^{-2i\pi xt}\phi(t)dt\right)=0$.

6b faux Le raisonnement qui suit est faux car A n'est pas indépendant de x

Comme la fonction est intégrable on sait que $\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A}e^{-2i\pi xt}f(t)dt\right)=\int_{\mathbb{R}}e^{-2i\pi xt}f(t)dt=F(t)$. Donc en écrivant la limite avec des quantificateurs :

$$\forall x>0,\forall\varepsilon>0,\exists A_{x,\varepsilon},A\geq A_{x,\varepsilon}\Rightarrow\left|F(x)-\int_{-A}^{A}e^{-2i\pi xt}f(t)dt\right|\leq\varepsilon$$

6b juste : il faut majorer par des quantités indépendantes de x :

$$\begin{aligned}\left|F(x)-\int_{-A}^{A}e^{-2i\pi xt}f(t)dt\right| &= \left|\int_{A}^{+\infty}e^{-2i\pi xt}f(t)dt+\int_{-\infty}^{-A}e^{-2i\pi xt}f(t)dt\right|\leq\int_{A}^{+\infty}|f(t)|\,dt+\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,dt-\int_{-A}^{A}|f(t)|\,dt\end{aligned}$$

L'intégrabilité de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ permet alors de conclure $\lim\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,dt-\int_{-A}^{A}|f(t)|\,dt\right)=0$ donc :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\exists A_\varepsilon,A\geq\varepsilon\Rightarrow\left(\forall x>0,\left|F(x)-\int_{-A}^{A}e^{-2i\pi xt}f(t)dt\right|\leq\varepsilon\right)}$$

6c) On a admis dans le cours que toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions en escalier. Donc $\exists(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier telle que $\lim\left(\sup_{[-A,A]}(|f-\phi_n|)\right)=0$. Donc

$$\forall\alpha>0,\exists N,n\geq N\Rightarrow\sup_{[-A,A]}(|f-\phi_n|)\leq\alpha$$

En prenant $\alpha=\frac{\varepsilon}{2A}$ puis $\phi=\phi_N$ on a une solution du problème.

6d) Reste à majorer $|F(x)|$ pour $x>0$ en partant de $f(x)=f(x)-\phi(x)+\phi(x)$ et

$$|F(x)|\leq\left|F(x)-\int_{-A}^{A}e^{-2i\pi xt}f(t)dt\right|+\left|\int_{-A}^{A}(f(t)-\phi(t))\,e^{-2i\pi xt}dt\right|+\left|\int_{-A}^{A}\phi(t)e^{-2i\pi xt}dt\right|$$

On se fixe un $\varepsilon>0$. La question **6b)** nous donne un A qui ne dépend que de ε et tel que

$$\left|F(x)-\int_{-A}^{A}e^{-2i\pi xt}f(t)dt\right|\leq\varepsilon.$$

La question **6c)** nous donne une fonction ϕ en escalier sur $[-A,A]$ et qui dépend de A et de ε (donc seulement de ε) et telle que $\sup_{[-A,A]}(|f-\phi_n|)\leq\frac{\varepsilon}{2A}$. On a alors

$$\left|\int_{-A}^{A}(f(t)-\phi(t))\,e^{-2i\pi xt}dt\right|\leq\int_{-A}^{A}\left|(f(t)-\phi(t))\,e^{-2i\pi xt}\right|dt\leq\int_{-A}^{A}|f(t)-\phi(t)|\,dt=\varepsilon$$

La question **6a)** nous donne alors un X qui dépend de A et de ϕ (donc uniquement de ε) tel que

$$\forall x\geq X\ ,\ \left|\int_{-A}^{A}\phi(t)e^{-2i\pi xt}dt\right|\leq\varepsilon$$

Si on réunit les trois :

$$\forall\varepsilon>0,\exists X,(x\geq X\Rightarrow|F(x)|\leq3\varepsilon)$$

$$\boxed{\lim_{+\infty}(F)=0}$$

On a exactement de la même façon $\lim_{-\infty}(F)=0$