Mines-Ponts PC PSI 2001 Math 2

Lecture du sujet:

On étudie les solutions d'une équation différentielle du second ordre.
Le I1 est incontournable. Sans le I1 on peut certes traiter quelques questions comme le II1 mais on restera très limité.
Il faut donc passer le temps qu'il faut sur cette question (peut-être deux heures) avant de passer aux questions suivantes.
Le sujet vous protège contre les erreurs de calculs en vous demandant f_i pour $i = -2 \cdots 1$. soit 4 vérifications possible.
Le cap du I1 étant passé, on voit que les parties qui suivent sont indépendantes (I2,I3,II).
Par contre l'indépendance au sein du II est difficile à prévoir.
On cherche à intégrer une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Les fonctions $a(x), b(x), c(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, par contre si $x = 0$, $a(x) = 0$. L'espace des solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ est un espace vectoriel de dimension 2. Le sujet dit clairement que les solution DSE forment un espace de dimension 1 . Il y a donc d'autres solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$.

1. Partie

Question I1

I1a) Sur l'intervalle $]-R, R[$, on écrit:

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

La somme d'une série entière est C^∞ sur le disque ouvert de convergence et, sur ce domaine, on peut dériver termes à termes.On a donc à l'intérieur du disque ouvert de convergence : :

$$f'_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \, , \, xf'_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n, \quad xf''_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n,$$

On a donc en ajoutant les termes et en isolant $n = 0$:

$$(a_1 - \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - na_n - \lambda a_n\right) x^n = 0$$

La somme d'une série entière est nulle si et seulement si les coefficients sont nuls ce qui fournit les relations :

$$a_1 = \lambda \text{ et } \forall n \geqslant 1, n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - na_n = \lambda a_n$$

et finalement la récurrence espérée :

$$a_0 = 1 \text{et } \forall n \geqslant 1, a_n = \frac{\lambda + n - 1}{n^2} a_{n-1}$$

. On résout facilement : $\boxed{a_0 = 1, \forall n \geq 1 : a_n = \frac{1}{n!^2} \prod_{k=1}^{n}(\lambda - 1 + k)}$.

En particulier, si $\lambda = 1$, $a_n = 1/n!$ et $\boxed{f_1 = \exp}$
si $\lambda = 0$, $a_n = 0$ si $n \geq 0$ et $\boxed{f_0 = 1}$
si $\lambda = -1$, $a_n = 0$ si $n \geqslant 2$ et $\boxed{f_{-1} : x \mapsto 1 - x}$
si $\lambda = -2$, $a_n = 0$ si $n \geqslant 3$ et f_{-2} : $\boxed{x \mapsto 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2}$.

il est interdit dans un problème de ce type de passer aux questions suivantes sans avoir trouver des résultats justes (la vérification est à chaque fois facile)

I1b) f_λ est un polynôme si et seulement si a_n est nul à partir d'un certain rang . D'après la récurrence il est évident que si $a_N = 0$ alors pour $n \geq N$ $a_n = 0$.
f_λ est donc un polynôme si et seulement si $\lambda + n - 1$ est nul pour un entier n .Donc si et seulement si $\boxed{\lambda \in -\mathbb{N}}$
Si $\lambda = -p \in -\mathbb{N}$, f_{-p} est de degré p et de coefficient dominant égal à $\frac{1}{p!^2} \prod_{k=1}^{p}(-p - 1 + k) = (-1)^p/p!$.

$$\boxed{f_{-p}(x) = (-1)^p \frac{x^p}{p!} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k}$$

I1c) Si $\lambda \notin -\mathbb{N}$, les coefficients a_n sont tous non nuls et on peut appliquer la règle de D'Alembert :

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim \frac{\lambda + n}{(n+1)^2} |x| = 0$$

Le rayon de convergence de la série entière est $\boxed{R=+\infty}$.
Le calcul précédent montre donc que s'il existe une solution c'est la série précdente. La réciproque étant une simple vérification en refaisant une dérivation termes à termes le sujet a admis le résultat .

Question I2

I2a) On a vu que la fonction exponentielle est solution sur $\mathbb{R}$ de E_1. Cherchons les solutions sur la demi droite $]0,+\infty[$ en utilisant la méthode de variation de la constante. Elle sont de la forme $y(x) = z(x)e^x$ où z est de classe $\mathcal{C}^2$ car $z(x) = y(x)e^{-x}$ est le produit de deux fonctions C^2.On a :
$y(x) = z(x)e^x$
$y'(x) = z(x)e^x + z'(x)e^x$
$y"(x) = z(x)e^x + 2z'(x)e^x + z"(x)e^x$
Si on reporte dans l'équation on a après simplification par e^x :

$$(E_1) \Leftrightarrow x(z'' + 2z' + z) + (1-x)(z' + z) - z = 0 \Leftrightarrow xz'' + (x+1)z' = 0$$

On sait par le cours que le coefficient de $z(x)$ doit être nul . Sinon il faut reprendre le calcul. Comme on a fait toutes les vérifications au I1 on doit vite trouver l'erreur.
On peut intégrer sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque le coefficient de $z"$ est non nul :
$z'(x) = \exp\left(\int -\frac{x+1}{x}\right) = \alpha e^{-x}/x$où α est une constante arbitraire.
On en déduit, en prenant la primitive nulle en 1 (*le sujet impose cette primitive)* la solution générale souhaitée :

$$\boxed{f : \forall x > 0, f^+_{\alpha,\beta}(x) = \alpha e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \beta e^x}$$

où α et β sont des réels arbitraires.
I2b) De même si $x < 0$

$$f : \forall x > 0, f^-_{\gamma,\delta}(x) = \alpha e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \delta e^x$$

où γ et δ sont des réels arbitraires.
Le calcul est le même . Vous devez rédiger plus vite . Les justifications théoriques peuvent négligées.
I2c) Pour trouver une solution sur $\mathbb{R}$ il faut raccorder ces solutions en $x = 0$.
Or $\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty$: $\frac{e^{-t}}{t} \geqslant \frac{e^{-1}}{t}$ et donc $\frac{e^{-t}}{t}$ est continue positive , non intégrable sur $]0,1]$. Un raccord par continuité impose $\alpha = 0$.
De façon analogue, $\lim_{x\to 0^-} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty$ et un raccord impose $\gamma = 0$.
Finalement les seules solutions définies sur tout $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les $\boxed{x \mapsto \alpha e^x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}}$ et ces fonctions sont C^2 sur $\mathbb{R}$ de façon évidente.

Question I3

I3a) *D'après la question suivante il est évident que $E_{1-\lambda}$ doit intervenir dans la réponse.*
g_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout x réel, $f_\lambda(x) = e^x g_\lambda(-x)$, on a $f'_\lambda(x) = e^x(g_\lambda(-x) - g'_\lambda(-x))$ et $f''_\lambda(x) = e^x(g''_\lambda(-x) - 2g'_\lambda(-x) + g_\lambda(-x))$, et remplaçant dans (E_λ) et simplifiant par l'exponentielle jamais nulle, on obtient l'équation différentielle vérifiée par g_λ :

$$xg_\lambda"(-x) - (1+x)g'_\lambda(-x) + (1-\lambda)g_\lambda(-x) = 0$$

en remplaçant x par $-x$: $xy'' + (1-x)y' + (\lambda - 1)y$, où l'on reconnaît $E_{1-\lambda}$.

$$\boxed{g_\lambda \text{ est solution de } E_{1-\lambda}}$$

On peut vérifier pour $\lambda = 1$.
I3b) *Il est d'étrange d'admettre le résultat. Les PSI* doivent connaître aussi leur cour sur le produit de Cauchy de deux séries entières.*
D'après ce qui précède et l'unicité admise par l'énoncé à la fin de la question I.1.c, il suffit de vérifier qu'en 0, la valeur prise par $e^x f_\lambda(-x)$ vaut bien 1, ce qui est évident.

$$\boxed{f_{1-\lambda} = e^x f_\lambda(x)}$$

I3c) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout x : $f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$ et on a vu que f_{1-p} était un polynôme de degré $p-1$.
En particulier $\boxed{f_2(x) = (1+x)e^x}$ et $\boxed{f_3(x) = (1 + 2x + \frac{1}{2}x^2)e^x}$.
I3d) Au voisinage de $+\infty$, d'après le I.1.b, on dispose de

$$\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} = \frac{f_{-p}(-x)}{xf_{1-p}(-x)}$$

Or un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré donc :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} \sim \frac{x^p/p!}{x.x^{p-1}/(p-1)!} = \frac{1}{p}$$

Question I4 (pour information . Vous pouvez faire le calcul avec vos connaissances de Sup)
Le calcul fournit $\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z) = \frac{u}{r}\frac{2rf_\lambda'(r)-f_\lambda(r)}{2r^{3/2}}$ pour $u = x$, y ou z.
De même $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x,y,z) = (\frac{1}{r} - \frac{u^2}{r^3})\frac{2rf_\lambda'(r)-f_\lambda(r)}{2r^{3/2}} + \frac{u^2}{r^2}\frac{4r^2f_\lambda''(r)-4rf_\lambda'(r)+3f_\lambda(r)}{4r^{5/2}}$, et, en sommant, on obtient le laplacien de F, qui s'écrit: $\frac{2}{r}\frac{2rf_\lambda'(r)-f_\lambda(r)}{2r^{3/2}} + \frac{4r^2f_\lambda''(r)-4rf_\lambda'(r)+3f_\lambda(r)}{4r^{5/2}} = \frac{1}{4r^{5/2}}(4r^2f_\lambda''(r) + 4rf_\lambda'(r) - f_\lambda(r))$.
Tenant compte de l'équation (E_λ) vérifiée par f_λ, le laplacien se réécrit: $\frac{4r^2f_\lambda'(r)+(4\lambda r-1)f_\lambda(r)}{4r^{5/2}}$, et l'équation (P) devient tout simplement $(2\lambda+1)\frac{rf_\lambda(r)}{2r^{5/2}} = 0$ et est donc vérifiée dès que $\lambda = -1/2$.

2. Partie

Question II1

On a une intégrale de Wallis très classique.(voir les exos)
Après une intégration par parties : $I_{p+1} = \frac{2p+1}{2(p+1)}I_p$. Or $I_0 = \pi/2$ donc:

$$\boxed{I_p = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}}.$$

Question II2

II2a)L'application

$$\Phi : \Phi(\theta, x) = e^{x(\sin(\theta))^2}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi/2]\times\mathbb{R}$. Comme on intègre sur un segment il est inutile de dominer. $\boxed{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$
II2b) Soit x un réel fixé. Comme $e^z = \sum_0^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ pour tout z réel on a pour tout x réel et tout $\theta \in [0,\pi/2]$ $e^{x\sin^2\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n\sin^{2n}\theta}{n!}$.On doit intégrer par rapport à θ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:
Soit $\psi_n(\theta) = \frac{x^n\sin^{2n}\theta}{n!}$ .Les fonctions ψ_n sont continues donc intégrable sur le segment . La série $\sum\psi_n$ converge vers une fonction continue par morceaux..
De plus $\int_0^{\pi/2}|\psi_n| = \int_0^{\pi/2}\frac{|x|^n\sin^{2n}\theta}{n!}d\theta \le \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{n!}$ est le terme général d'une série convergente.($\sum\frac{|x|}{n!} = e^{|x|}$)
On peut donc intégrer terme à terme, c'est-à-dire écrire :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \phi(x) = \int_0^{\pi/2}e^{x\sin^2\theta}\,d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(2p)!}{4^pp!^3}x^p.$$

remarque : Comme on intègre sur un segment on peut aussi prouver la convergence uniforme de la série $\sum\psi_n$ *sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *. Mais comme on intègre par rapport à* θ *on n'intègre pas une série entière.*
ϕ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec un rayon de convergence infini. Ses coefficients sont les $I_p/p!$, qui vérifient la récurrence : $I_0 = \pi/2$ et $\frac{I_n}{n!} = \frac{2n-1}{2n^2}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$.
Or $f_{1/2}$ est la fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ dont les coefficients vérifient $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, a_n = \frac{n-1/2}{n^2}a_{n-1}$: ce sont donc les mêmes coefficients, à $\pi/2$ près.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, \phi(x) = \frac{\pi}{2}f_{1/2}(x)}.$$

Question II3

II3a) La fonction $\alpha(u) = (1-u)e^u$ est C^1 sur $]-\infty,1[$, de dérivée $\alpha'(u) = ue^u$. Elle est donc maximum en $x = 0$ et son maximum vaut 1. On en déduit l'inégalité

$$\boxed{\forall u < 1, \exp(u) \le \frac{1}{1-u}}$$

II3b) Notons que comme $x < 1$,$\left|x\sin^2(\theta)\right| < 1$ et la fonction sous le signe $\int$ est continue : <u>l'intégrale est définie</u>.
Le changement de variable $t = \tan\theta$ est C^1 sur $[0,\pi/2[$ mais pas sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ d'où la rédaction :

$$\begin{aligned} J(x) &= \lim_{T\to\pi/2}\left(\int_0^T\frac{d\theta}{1-x\sin^2\theta}\right) = \lim_{T\to\pi/2}\left(\int_0^{\tan(T)}\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1-x\frac{t^2}{1-t^2}}\right) = \lim_{T\to\pi/2}\left(\int_0^{\tan(T)}\frac{dt}{1+(1-x)t^2}\right) \\ &= \lim_{T\to\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\arctan\left(\tan(T)\sqrt{1-x}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

remarque:Pour un simple calcul explicite par passage à la limite ne perdez pas de temps à prouver l'intégrabilité mais n'écrivez pas $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+(1-x)t^2}$
II3c) La positivité de $\phi(x)$ est évidente. La majoration est conséquence immédiate du a:

$$\boxed{\phi(x) \le J(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}}$$

remarque : contrôle partiel de **II3b**.

II3d) Pour $\theta \in [0, \pi/2]$, on dispose de $\sin^2\theta \leqslant \theta^2$, et donc, pour $x \leqslant -1$, de $x\sin^2\theta \geqslant x\theta^2$ ($x < 0$ *donc attention aux changement de sens dans vos inégalités)*
Alors, toujours pour $x \leqslant -1$, on a :

$$\phi(x) \geqslant \int_0^{\pi/2} e^{x\theta^2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-(\sqrt{-x}\theta)^2}\frac{d(\sqrt{-x}\theta)}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{\sqrt{-x}}\int_0^{\pi\sqrt{-x}/2} e^{-v^2}\,dv \geqslant \frac{1}{\sqrt{-x}}\int_0^{\pi/2} e^{-v^2}\,dv.$$

On dispose donc de la minoration souhaitée, où $\boxed{A = \int_0^{\pi/2} e^{-v^2}\,dv}$.
Ce n'est peut-être pas la seule méthode.
II3e) Grâce à l'encadrement démontré au **c.**, il est clair que ϕ est de limite nulle en $-\infty$. Mais comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-x}}$ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1]$, la minoration du **d.** prouve que ϕ n'est pas non plus intégrable sur $]-\infty, -1]$.

Question II4

II4a)D'après le I.3.b, $\forall x \in \mathbb{R}, f_{1/2}(x) = e^x f_{1/2}(-x)$ donc $h(x) = e^{-x/2}f_{1/2}(x) = e^{x/2}f_{1/2}(-x) = h(-x)$, et

$$\boxed{h \text{ est paire}}$$

Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}(h(x) + h(-x)) = \frac{1}{\pi}(e^{-x/2}\phi(x) + e^{x/2}\phi(-x)) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} e^{x/2(2\sin^2\theta-1)} + e^{-x/2(2\sin^2\theta-1)}\right)d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\,du \end{aligned}$$

grâce à la parité du cosinus hyperbolique.

$$\boxed{h(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\,du}$$

On peut aussi partir du résultat . Dans tous les cas il faut comprendre qu'aucune formule de trigo ne transforme $\sin(\theta)^2$ *en* $\cos(\theta)$ *et donc qu'il y aura aussi un changement de variable ... mais c'est la fin d'un sujet des Mines.*
II4b)$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 + t^2 + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!} \geqslant 1 + \frac{t^2}{2}$ Donc :

$$\forall x > 0, h(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\,du \geqslant 1 + \frac{1}{4\pi}x^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du = 1 + \frac{x^2}{16}.$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{+\infty} h(x) = \lim_{+\infty}\frac{h(x)}{x} = +\infty}$.
II4c) La fonction h est clairement croissante sur $[0, +\infty[$ car

$$0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \forall u \in [0, \pi/2], 0 \leqslant \frac{x}{2}\cos u \leqslant \frac{y}{2}\cos u \Rightarrow 1 \leqslant \operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u) \leqslant \operatorname{ch}(\frac{y}{2}\cos u) \Rightarrow h(x) \leqslant h(y).$$

On peut aussi dire aussi (théorème de dérivation d'un intégrale à paramètre sur un segment que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$h'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos u\ \operatorname{sh}(\frac{x}{2}\cos u)\,du \text{ et } h''(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\ \operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\,du \geqslant 0,$$

ce qui conclut à la croissance sur $[0, +\infty[$ et la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.
On a aussi :
$h(0) = 1$ $h'(0) = 0$
il y a une branche parabolique verticale si x tend vers $+\infty$(**II4b)**
la fonction est paire
L'aspect général (très simple) de la courbe s'en déduit aussitôt.