CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

Math 1 , 1994

(extrait)

Partie A

A1) Soit une base B de vecteurs propres de s ; on a

$$s_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad u_{kB} = \begin{pmatrix} P_k(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_k(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Or $\forall i \quad \lim P_k(i) = \exp(\lambda_i)$, donc u_{kB} converge puis u_k converge et

$$(\exp s)_B = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est indépendant de la base de calcul et :

$$\det(\exp s) = \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \exp \operatorname{tr}(s).$$

A2a) Ainsi $\det \exp s > 0$: $\exp s$ est bien un automorphisme.
De plus

$$\begin{aligned}
(\exp(\alpha+\beta)s)_B &= \begin{pmatrix} \exp((\alpha+\beta)\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp((\alpha+\beta)\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp((\alpha+\beta)\lambda_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(\alpha\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\alpha\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(\alpha\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(\beta\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\beta\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(\beta\lambda_n) \end{pmatrix} \\
&= (\exp \alpha s)_B (\exp \beta s)_B
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\exp((\alpha+\beta)s) = \exp(\alpha s)\exp(\beta s)}$$

A2b) L'application $t \mapsto (\exp ts)_B = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(t\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car ses composantes le sont (et que la dimension finie).

A3) $\forall i \quad s'(f(e_i)) = fsf^{-1}f(e_i) = fs(e_i) = f(\lambda_i e_i) = \lambda_i f(e_i)$.

Ainsi $s_B = s'_{B'}$ et par A1, $(\exp s')_{B'} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix} = (\exp s)_B$.

Alors pour tout i on a : $(\exp s')(f(e_i)) = e^{\lambda_i} f(e_i) = f(e^{\lambda_i} e_i) = f(\exp s)(e_i) = f(\exp s)f^{-1}(e_i)$. Les deux applications $\exp s'$ et $f(\exp s)f^{-1}$ sont égales sur une base , donc sont égales.

$$\boxed{\exp(fsf^{-1}) = f(\exp s)f^{-1}.}$$

A4a) En considérant le cas où s est une symétrie non triviale on constate qu'un vecteur propre de s^2 n'est pas toujours vecteur propre de s et qu'une base qui diagonalise s^2 ne diagonalise pas nécessairement s.

A4b) Le résultat est maintenant différent car exp est bijective.
Soit $E = \oplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(s)$ la décomposition de E en somme directe de sous espace propre.
Tout vecteur v de E se décompose $v = \sum_{k=1}^{p} v_k$ dans cette base . Si on suppose que v est un vecteur propre de exp s il existe une valeur propre μ telle que $(\exp s)(v) = \mu v$) soit :

$$\sum_{k=1} \exp(\lambda_k) v_k = \sum_{k=1} \mu v_k$$

Comme la somme est directe :

$$\forall k : \exp(\lambda_k) v_k = \mu v_k$$

si $\forall k\ \exp(\lambda_k) \neq \mu$ alors $\forall k\ v_k = 0$ et $v = 0$: absurde pour un vecteur propre:
donc $\exists j\ \exp(\lambda_j) = \mu$ et $\forall k \neq j$, $v_k = 0$ donc $v = v_k \in E_k$

$\boxed{\text{tout vecteur propre de exp s est un vecteur propre de s}}$

Réciproquement il est évident que si $s(v) = \lambda v$, $\exp s(v) = \exp \lambda\, v$ .Donc tout vecteur propre de s est vecteur propre de exp s .

Ainsi s et exp s admettent les mêmes vecteurs propres et donc toute base qui diagonalise l'un diagonalise l'autre.

A5) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable. On peut donc appliquer les résultats des questions précédentes.
De plus la base de vecteurs propres B peut être choisie orthonormale. Donc $(\exp s)_B$ est diagonale donc la matrice de exp s et symétrique dans une base orthonormale de plus ses valeurs propres $(\exp(\lambda_i))$ sont > 0 donc $\boxed{\exp s \in S^+}$.
injectivité : si $\exp s = \exp s'$; $(s, s' \in S)$ alors il existe B base orthonormale telle que

$$(\exp s)_B = (\exp s')_B = \mathrm{diag}(m_i) \text{ avec } m_i > 0.$$

D'après A4b) s_B et s'_B sont diagonales et par A1) leurs éléments diagonaux vérifient $\lambda'_i = \lambda_i = \ln(m_i)$ donc $s_B = s'_B$ soit $s = s'$.
surjectivité : soit $u \in S^+$. Il existe une base orthonormale B telle que $u_B = \mathrm{diag}(m_i)$; $m_i > 0$
Définissons s par $s_B = \mathrm{diag}(\ln(m_i))$, alors $\exp s = u$ et $s \in S$ car elle sa matrice est symétrique dan la base orthonormale B

$\boxed{s \to \exp s \text{ est bijective de } S \text{ sur } S^+}$

.

Partie B

B1a) Notons X et Y les colonnes des coordonnées de x et y dans B.
Puisque B est orthonormale on a : $\langle x, y\rangle = {}^tXY$ et ${}^tf^*_B = f_B$.
Donc $\langle f^*(x), y\rangle = {}^t(f^*_B X)Y = {}^tX\,{}^tf^*_B Y = {}^tX f_B Y = \langle x, f(y)\rangle$.
B1b) $g^*g = i$, $g^* = g^{-1}$: ce sont les endomorphismes orthogonaux.
B2) s est symétrique donc il existe une base orthonormale $B = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $s_B = \mathrm{diag}(\lambda_i)$
Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a ; $s(x) = \sum \lambda_i x_i e_i$ et

$$Q_s(x) = \langle s(x), x\rangle = \sum \lambda_i x_i^2$$

Si $s \in S^+$ alors $\lambda_i > 0$ pour tout i donc $Q_s(x) \geq 0$ pour tout x et $Q_s(x) = 0 \Rightarrow \forall i\ \lambda_i x_i = 0$ (somme nulle de réels positifs) . Or $\lambda_i > 0$ donc $\forall i\ x_i = 0$ et $x = 0$. Donc Q_s est définie positive.
Réciproquement supposons Q_s définie positive. Alors $\lambda_i = Q_s(e_i) > 0$ donc s est dans S^+.
B3) Soit f inversible.
$Q_{f^*f}(x) = \langle f^*f(x), x\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle$ (d'après B1a) donc
$Q_{f^*f}(x) = \|f(x)\|^2 \geq 0$ et $Q_{f^*f}(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \vec{0} \Rightarrow x = \vec{0}$ (f est inversible).
Ainsi Q_{f^*f} est définie positive.
Or f^*f est symétrique car $(f^*f)^* = f^*f^{**} = f^*f$ donc B2) s'applique :

$$f^*f \in S^+.$$

B4a) Si $f = g \exp s$ on a

$$\begin{aligned} f^*f &= (\exp s)^* g^* g \exp(s) \\ &= (\exp s)^* \exp(s) \text{ car } g^*g = i \text{ pour un endomorphisme orthogonal} \\ &= (\exp s) \exp(s) \text{ car } \exp s \text{ est symétrique (A5)} \end{aligned}$$

$$\boxed{f^*f = \exp 2s}$$

B4b)

<u>existence</u>

Par B3) $f^*f \in S^+$, on peut donc définir $s = \frac{1}{2}\log(f^*f)$ (A5); puis poser $g = f \exp -s$.
Alors $s \in S$ et $f = g \exp s$. s est symétrique car $\log(f^*f)$ l'est. Reste à vérifier que g est orthogonal.
Or $g^*g = (\exp -s)f^*f \exp -s = \exp -s \exp 2s \exp -s = \exp O = i$
Ce qui achève la preuve d'existence.

<u>unicité</u> :

Si $g \exp s = g' \exp s'$ alors $h = g^{-1}g' = \exp(s - s')$ est dans $S^+ \cap G$.
Les valeurs propres d'une matrice de S^+ sont des réels positifs , celle d'une matrice orthogonale sont de module 1 .
h et donc un endomorphisme diagonalisable (car symétrique) dont la seule valeur propre est 1 . Donc $h = i$ donc $g' = g$ puis $s' = s$ par injectivité de exp (A5).

B5)Pour tout x, $\|f(x)\| \geq \|x\|$, donc f est injective ($f(x) = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$), puis $f = g \exp s$ (B4).
Soit $C = (e_1; \dots; e_n)$ une base orthonormale qui diagonalise $\exp s$.Pour $x = e_i$ on a par hypothèse
$\|f(e_i)\| \geq \|e_i\|$. Or $f(e_i) = g(\exp(\lambda_i)e_i) = \exp(\lambda_i)g(e_i)$. Donc $\|f(e_i)\| = \exp(\lambda_i)\|g(e_i)\| = \exp(\lambda_i)\|e_i\|$ car g endomorphisme orthogonal conserve la norme. Donc :

$$\forall i; \exp(\lambda_i) \geq 1$$

Ainsi $|\det f| = |\det g \det(\exp s)| = |\det g|.|\prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i)| = 1.|\prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i)| \geq 1$.