TPE 96 : Spirale de CORNU

Remarque : on ne sait pas calculer à l'aide des fonctions usuelles les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$. Les intégrales qui définissent X et Y sont proportionnelles aux intégrales de Fresnel et définies comme telles par MAPLE.

Dans tout le problème je note $Z(t)$ l'affixe du point $M(t)$. On a donc :

$$Z(t) = X(t) + iY(t) = \int_0^t e^{iu^2} du$$

Remarque : introduire la variable complexe a toujours été un bon outil pour traiter des $\sin$ *et* $\cos$. *Dans ce problème il n'y a pas de simplification des calculs , mais un bon outil pour rédiger une seule démonstration pour Z au lieu de deux .*

I CONSTRUCTION DE Γ

I1 X et Y sont des primitives de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$, elles le sont donc aussi. De plus

$$X'(t) = \cos\left(t^2\right).Y'(t) = \sin\left(t^2\right)$$

Le changement de variable $v = -u$, donne $X(-t) = -\ X\ (t)$ et $Y(-t) = -Y\ (t)$,

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ , impaires et } \Gamma \text{ est symétrique par rapport au point } O}$$

I2 *Le problème est celui de la convergence de* $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$. *On a* $\left|e^{iu^2}\right| = 1$ *donc il n'y a pas convergence absolue . Les outils usuels sont donc : intégration par parties et/ou changement de variable pour retrouver une fonction intégrable.*

La fonction $u -> e^{iu^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour ne pas créer de problème en 0 on se place sur $[1, +\infty[$.

On a $e^{iu^2} = \frac{1}{u}\left(ue^{iu^2}\right)$. on peut donc intégrer par partie en posant $U = \frac{1}{u}$, $V' = ue^{-iu^2}$ U et $V = \frac{1}{2i}e^{-iu^2}$ sont C^1 sur le segment $[1, t]$. Comme on a un problème en zéro on écrit :

$$\int_1^t e^{iu^2} du = \frac{i}{2}\left(\frac{e^{it^2}}{t} - e^i\right) - \frac{1}{2i}\int_1^t \frac{e^{iu^2}}{u^2} du$$

On a alors :

- $\left|\frac{e^{it^2}}{t}\right| = \frac{1}{t} \rightarrow_{t\rightarrow+\infty} 0$
- $\left|\frac{e^{iu^2}}{u^2}\right| = \frac{1}{u^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$

Donc $\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du$ converge et donc aussi $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$

$$\boxed{X(t) \text{ et } Y(t) \text{ ont des limites finies si } t \text{ tend vers } +\infty}$$

remarque: On peut aussi faire le changement de variable $v = u^2$ suivi d'une intégration par partie :

$$\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du \text{ CV ssi } \int_1^{t^2} e^{iv} \frac{dv}{2\sqrt{v}} \text{ CV puis } \int_1^t e^{iv}\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \left[\frac{ie^{iv}}{2\sqrt{v}}\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{4v^{\frac{3}{2}}} e^{iv} dv.$$

cette méthode est plus dans l'esprit des questions I5 et I6.

$$\boxed{\text{La courbe } \Gamma \text{ a donc un point asymptote } K}$$

I3 Vues les parités constatées en I1 on se limite à t positif. Comme $X'\ (t) = \cos\left(t^2\right)$ et $Y'\ (t) = \sin\left(t^2\right)$ les tableaux de variation sont immédiats:

- $X(t)$ croit sur tout intervalle $\left[\sqrt{2k\pi - \pi/2}, \sqrt{2k\pi + \pi/2}\right]$ et décroît sur tout intervalle $\left[\sqrt{2k\pi + \pi/2}, \sqrt{2k\pi + 3\pi/2}\right]$
- $Y(t)$ croit sur tout intervalle $\left[\sqrt{2k\pi}, \sqrt{2k\pi + \pi}\right]$ et décroît sur tout intervalle $\left[\sqrt{2k\pi + \pi}, \sqrt{2k\pi + 2\pi}\right]$.
- les valeurs des extremums restent des intégrales que l'on ne sait pas calculer.

I4 D'après I2 $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$ est l'affixe de K et $\int_0^t e^{iu^2} du$ est l'affixe de $M(t)$
D'après la relation de Chasles sur les intégrales, nous reconnaissons que :

$$F(t) = \left|\int_0^{\rightarrow+\infty} e^{iu^2} du - \int_0^t e^{iu^2} du\right|^2 = \|KM(t)\|^2$$

$$\boxed{F(t) = KM(t)^2 \text{ le carré de la distance de } M(t) \text{ au point asymptote } K.}$$

F somme de carrés de fonction de classe infinie est elle même de classe infinie.

En dérivant par rapport à la borne inférieure on a :

$$F'(t) = -2\cos\left(t^2\right)\int_t^{\to +\infty} \cos\left(u^2\right) du - 2\sin\left(t^2\right)\int_t^{\to +\infty} \sin\left(u^2\right) du = -2\int_t^{\to +\infty} \cos(u^2 - t^2) du$$

La dernière intégrale converge par combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

Dans l'intégrale convergente on peut faire le changement de variable $u = \sqrt{t^2 + v}$ C^1 bijectif de $]t, +\infty$ sur $]0, +\infty$ donne :

$$\int_t^{+\infty} \cos(t^2 - u^2) du = \int_0^{+\infty} \cos(v) \frac{dv}{2\sqrt{t^2 + v}}$$

On peut se placer sur $[t, +\infty[$ *sauf pour* $t = 0$ *.*

d'où

$$\boxed{F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos(v)}{\sqrt{t^2+v}} dv}$$

I5a *L'aire représenter par la courbe* $f(u)\cos(u)$ *a une partie positive pour* $u < \pi/2$ *et une partie négative pour* $u > \pi/2$ *. mais par symétrie de* $\cos$ *et décroissance de* f *l'aire positive va être plus grande (en valeur absolue) que l'aire négative . d'où la rédaction par Chasles et changement de variable :*

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(u)\cos(u)\, du &= \int_0^{\pi/2} f(u)\cos(u)\, du + \int_{\pi/2}^{\pi} f(u)\cos(u)\, du = \int_0^{\pi/2} f(u)\cos(u)\, du - \int_0^{\pi/2} f(\pi - v)\cos(v)\, dv \\
&= \int_0^{\pi/2} (f(u) - f(\pi - u))\cos(u) du
\end{aligned}$$

Par décroissance stricte de f on intègre une fonction continue strictement positive , et les bornes sont dans le bon sens. Donc

$$\boxed{\int_0^{\pi} f(u)\cos(u)\, du > 0}$$

I5b Le changement de variable C^1 sur un segment : $v = n\pi + s$ donne $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\cos s}{\sqrt{\alpha + n\pi + s}} ds$ .Or

- u_n est du signe de $(-1)^n$:en effet $s -> \frac{1}{\sqrt{\alpha+n\pi+s}}$ est continue , strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et le I5a s'applique.
- $|u_n|$ est strictement décroissante: en effet on intègre l'inégalité $\frac{\cos s}{\sqrt{\alpha+(n+1)\pi+s}} < \frac{\cos s}{\sqrt{\alpha+n\pi+s}}$ les bornes étant dans le bon sens.
- $|u_n| \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha+n\pi+s}} ds = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+n\pi+s}} \to 0$
- La série proposée vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées.

$$\boxed{\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(v)}{\sqrt{a+v}} \text{ est une série convergente}}$$

D'après les propriétés du critère spécial des séries alternées la somme de la série est du signe du premier terme:

$$\boxed{I > 0}$$

I5c Comme $F'\ (t) < 0$ on en déduit que

$$\boxed{F \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^+}$$

Le point $M(t)$ se rapproche de K et tend vers K.

I6 *remarque: On reprend les idées précédentes mais pas le détail du calcul car* $Y(t)$ *ne se met pas sous la forme d'une intégrale sur* $\mathbb{R}^+$*.*

On a $Y(t) = \int_0^t \sin(u^2) du = \int_0^{t^2} \sin(v) \frac{dv}{2\sqrt{v}}$ en faisant le changement de variable $v = u^2$ C^1 bijectif de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. C'est licite car on sait déjà que $\int_0^t \sin(u^2) du$ converge.

La fonction $\frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}$ étant prolongeable par continuité en $t = 0$.

Pour tout t réel on peut trouver un entier k tel que $2k\pi \leq t^2 < (2k + 2)\pi$.

On a alors $Y(t) = \int_0^{2k\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}} dv + \int_{2k\pi}^{t^2} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}} dv$.

- $\int_0^{2k\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}} dv = \sum_{n=0}^{2k-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}} dv = \sum_{n=0}^{2k-1} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(w)}{2\sqrt{w+n\pi}} dw$ est la somme partielle d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées. Elle est donc du signe du premier terme donc positive strictement.

- si $t^2 \leq (2k+1)\pi$: $\int_{2k\pi}^{t^2} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,dv > 0$ comme intégrale d'une fonction positive , les bornes étant dans le bon sens.
- si $t^2 > (2k+1)\pi$: $\int_{2k\pi}^{t^2} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,dv = \int_{2k\pi}^{2(2k+1)\pi - t^2} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}dv + \int_{2(2k+1)\pi - t^2}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}dv + \int_{(2k+1)\pi}^{t^2} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}dv$
  - la première intégrale est positive comme intégrale d'une fonction positive
  - dans la troisième intégrale le changement de variable $w = 2(2k+1)\pi - v$ donne :

$$\int_{(2k+1)\pi}^{t^2} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,dv = -\int_{2(2k+1)\pi - t^2}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(w)}{2\sqrt{2(2k+1)\pi - w}}\,dw$$

  et donc comme au I5a la somme $\int_{2(2k+1)\pi - t^2}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,dv + \int_{(2k+1)\pi}^{t^2} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}dv$ est positive.

Remarque : le découpage au point $2(2k+1)\pi - t^2$ est choisi pour utiliser la symétrie du sinus par rapport à $(2k+1)\pi$. C'est le point symétrique de t^2 par rapport à $(2k+1)\pi$. voir figure en annexe.

$$\boxed{\forall t > 0, Y(t) > 0}$$

I7 Γ ne peut admettre de point double :

- si $0 \leq t < t'$ on a $F(t') < F(t)$ par décroissance stricte de F . donc $\|KM(t')\| < \|KM(t)\|$ donc $M(t) \neq M(t')$
- Si $t < t' \leq 0$ la symétrie par rapport à 0 prouve que $M(t) \neq M(t')$
- Enfin si $t < 0$ et $t' > 0$ la question I6 et la symétrie montrent que $Y(t) < 0$ et $Y(t') > 0$ donc $M(t) \neq M(t')$

$$\boxed{\text{la courbe } \Gamma \text{ n'a pas de point double}}$$

I8 Pour avoir un point d'inflexion on écrit que $\det\left(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}\right)$ change de signe .

$$X'(t)\,Y''(t) - X''(t)\,Y'(t) = \cos t^2 (2t\cos t^2) + (2t \sin t^2)\sin t^2 = 2t$$

l'origine est le seul point d'inflexion de Γ .
I9 Allure du graphe sur la figure jointe.

- point limite K et $KM(t)$ est une longueur qui décroît vers 0 .
- variations de X et Y
- pas d'inflexion sur $\mathbb{R}^{+*}$
- le premier extremum pour $t > 0$ est un extremum de X .
- si $t = 0$, $X(0) = Y(0) = 0$, $X'(0) \neq 0$, $Y'(0) = 0$: passage en 0 avec tangente horizontale et point d'inflexion.

II ÉTUDE MÉTRIQUE DE Γ

II10 Si on oriente la courbe, dans le sens des t croissants et en prenant $t = 0$ comme origine on a $ds^2 = (X'^2(t) + Y'^2(t))dt^2 = ((\cos(t^2))^2 + (\sin(t^2))^2)dt^2 = dt^2$ donc $ds = dt$ et $\boxed{s = t}$.

II11 Si $t = 0$ le point n'est pas birégulier ($M'(0)$ et $M''(0)$ sont liés) , le rayon de courbure n'est pas définie. Si $t \neq 0$ le point est birégulier (*I8*) et on finit de calculer le repère de Frenet on a : $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{N} = R_{\pi/2}(\overrightarrow{T}) = \begin{pmatrix} -\sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}$

$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = 2t\overrightarrow{N}$. Or $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{R}$ donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{si } t = 0 \text{ le point n'est pas birégulier} \\ \text{si } t \neq 0 : R = \frac{1}{2t}\end{array}}$$

La question suivante donne une vérification des calculs.

II12a comme toute fonction abscisse curviligne la fonction $s(\phi)$ est continue strictement monotone.

La courbe étant C^2 birégulière on sait que ϕ est un paramétrage admissible C^1et donc que $s(\phi)$ est un C^1 difféomorphisme sur des intervalles bien choisis.

Par définition $R = \frac{1}{\gamma}$ et $\gamma = \frac{d\phi}{ds}$ donc $Rs = 1/2 \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = 2s$ .donc en intégrant $\boxed{\phi = s^2 + k}$

II12b Si on fait subir à la courbe une rotation d'angle $-k$ l'abscisse curviligne n'est pas changée (une rotation ne change pas les longueurs) . Par contre l'angle de la tangente est diminué de k .

L'image par rotation de γ vérifie donc l'équation $\phi = s^2$.

On utilise alors la relation $T = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix}$ ce qui donne les formules :

- $\frac{dx}{ds} = \cos(\phi) = \cos(s^2)$ donc $x(s) = x_0 + \int_0^s \cos(u^2)du$
- $\frac{dy}{ds} = \sin(\phi) = \sin(s^2)$ donc $y(s) = y_0 + \int_0^s \sin(u^2)du$

  On obtient donc l'image d'une partie de Γ après translation de vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Il existe un déplacement } D \text{ tel que } D(\gamma) \subset \Gamma}$$

remarque 1: on ne peut pas retrouver Γ entier à cause du point O qui n'est pas birégulier.