MATHÉMATIQUES I

Durée : 4 heures

Options M, P, T, TA

I - Etude de suites

Pour un calcul célèbre Archimède considéra les relations de récurrence :

$$c_{n+1}=\sqrt{\frac{1+c_n}{2}} \qquad \lambda_{n+1}=\frac{\lambda_n}{c_{n+1}}.$$

1°) Montrer que pour $c_1=0$ et $\lambda_1=2$ ces relations définissent effectivement deux suites $(c_n)_{n\geq 1}$, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ et qu'il existe deux autres suites $(\theta_n)_{n\geq 1}$ et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telles que pour tout $n\geq 1$:

$$\theta_n \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad ; \quad \alpha_n \in \mathbb{R}_+ \quad ; \quad c_n=\cos(\theta_n) \quad ; \quad \lambda_n=\alpha_n\sin(\theta_n).$$

Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ converge vers π.

2°) En utilisant une formule de Taylor montrer, pour tout $n\geq 1$, l'inégalité :

$$|\pi-\lambda_n| \leq \frac{\pi^3}{6\times 4^n}.$$

En déduire un entier N_1 tel que $|\pi-\lambda_{N_1}| \leq 10^{-6}$.

3°) Montrer que pour tout entier naturel p donné, λ_n admet, lorsque n tend vers l'infini, le développement :

$$\lambda_n=\pi-\frac{\pi^3}{3!}\cdot\frac{1}{4^n}+\cdots+(-1)^p\frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\cdot\frac{1}{4^{pn}}+o\left(\frac{1}{4^{np}}\right).$$

4°) On définit une nouvelle suite $\left(\lambda_n^{(1)}\right)_{n\geq 1}$ par $\lambda_n^{(1)}=\dfrac{-\lambda_n+4\lambda_{n+1}}{3}$.

Montrer que cette nouvelle suite converge aussi vers π et que l'on a quand n tend vers l'infini

$$\lambda_n^{(1)}-\pi=o(\lambda_n-\pi).$$

Donner un équivalent de $\lambda_n^{(1)}-\pi$.

5°) Montrer qu'il existe un réel α (que l'on déterminera) tel que la suite $\left(\lambda_n^{(2)}\right)$ définie pour tout $n\geq 1$ par $\lambda_n^{(2)}=\alpha\,\lambda_n^{(1)}+(1-\alpha)\,\lambda_{n+1}^{(1)}$, vérifie

$$\lambda_n^{(2)}-\pi=o\left(\frac{1}{8^n}\right)$$

lorsque n tend vers l'infini.

6°) Donner $\lambda_n^{(2)}$ en fonction de λ_n, λ_{n+1} et λ_{n+2} et montrer l'inégalité pour tout n :

$$\left|\lambda_n^{(2)}-\pi\right| \leq \frac{17\pi^7}{576\times 7!}\cdot\frac{1}{4^{3n}}.$$

Déterminer une valeur N_2 telle que l'on ait $\left|\lambda_{N_2}^{(2)}-\pi\right|\leq 10^{-6}$.

II - Polynômes de Bernoulli

1°) Soit f une fonction définie continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Montrer que les conditions ci-dessous définissent une unique fonction F continûment dérivable sur $[0,1]$:

$$F' = f \qquad \int_0^1 F(t)dt = 0$$

et exprimer F à l'aide de G : $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$.

2°) Montrer que les conditions :

$$B_0 = 1, \quad B'_{n+1} = B_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

définissent une unique suite de fonctions polynômes.
Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré et expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4.

3°) Montrer, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$B_n(0) = B_n(1).$$

4°) On définit une suite de polynômes C_n en posant, pour tout n entier naturel :

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$

Montrer que la suite (C_n) vérifie les conditions du 2°) définissant la suite (B_n) et en déduire que $(C_n) = (B_n)$.

Qu'en déduit-t-on pour les graphes des B_n et pour les valeurs, lorsque n **est impair supérieur ou égal à 3**, de $B_n(0)$, $B_n(1/2)$ et $B_n(1)$?

5°) Montrer que les polynômes B_{2m+1} (pour $m \in \mathbb{N}$) ne s'annulent pas sur l'intervalle $]0,1/2[$ (on pourra procéder par récurrence sur m et utiliser le théorème de Rolle).

En déduire que les polynômes $B_{2m}(X) - B_{2m}(0)$ sont de signes constants sur $[0,1]$.

III - Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

1°) Montrer pour N entier naturel non nul :

$$\forall\, t \in]0,1[\qquad 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{N} \cos\,(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

2°) Montrer que pour tout entier $n > 0$, la fonction φ_n ci-dessous définie sur $]0,1[$ est prolongeable par continuité à $[0,1]$ et que le prolongement est continûment dérivable :

$$\forall\, t \in]0,1[\qquad \varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}.$$

3°) Montrer que pour toute fonction f continûment dérivable sur $[0,1]$ on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = 0$$

(on pourra utiliser une intégration par parties).

4°) Pour k et n entiers strictement positifs, on définit :

$$I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos\,(2k\pi t)dt.$$

Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$ et en déduire selon la parité de n, l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k.

5°) En utilisant la formule établie au III 1°), trouver, pour N entier naturel, une expression de

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin(2N+1)\pi t\,dt$$

en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$.

En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{2m}}$ en fonction de m et de $B_{2m}(0)$.

Donner les valeurs de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ et de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^4}$.

6°) Montrer, pour tout m entier naturel non nul, la majoration :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq 2$$

et en déduire la majoration $|B_{2m}(0)| \leq \dfrac{4}{(4\pi^2)^m}$.

Pour toute la suite du problème les fonctions considérées seront définies sur [0,1] et indéfiniment dérivables.

IV - Formule sommatoire d'Euler

1°) Montrer pour m entier strictement supérieur à 0 (**formule sommatoire à l'ordre m**) :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{m} B_{2k}(0)\left[f^{(2k-1)}(\underset{1}{t}) - f^{(2k-1)}(0)\right] - \int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)dt.$$

2°) Montrer, en utilisant II-5°), que pour tout m entier naturel, il existe c réel dans $[0,1]$ tel que

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)dt = B_{2m+2}(0)f^{(2m+2)}(c).$$

En déduire une majoration de cette intégrale en fonction de $\left\|f^{(2m+2)}\right\|$, où

$$\left\|f^{(2m+2)}\right\| = \sup_{x\in[0,1]}\left|f^{(2m+2)}(x)\right|.$$

3°) Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision régulière de pas $h = \dfrac{1}{n}$ de l'intervalle $[0,1]$ (on a donc $x_i = \dfrac{i}{n} = ih$, pour i = 0, 1,..., n).

Rappeler l'expression $T(h)$ obtenue par application de la méthode des trapèzes à la fonction f pour cette subdivision.

4°) Expliciter la formule sommatoire à l'ordre 2 pour les fonctions $f_i : t \mapsto f(x_i + ht)$ lorsque $i \in \{0,1,\cdots,n-1\}$.

En déduire l'existence des réels a_1 et a_2 et d'une fonction r tels que

$$\int_0^1 f(t)dt = T(h) + a_1h^2 + a_2h^4 - r(h)$$

avec $|r(h)| \leq \left\|f^{(6)}\right\| \dfrac{h^6}{16\pi^6}$.

V - Accélération de Romberg

On reprend la méthode utilisée dans la partie I et on définit T_0, T_1, T_2 en posant :

$$T_0(h) = T(h)$$

$$T_1(h) = \frac{-T_0(h) + 4T_0\left(\frac{h}{2}\right)}{3}$$

$$T_2(h) = \frac{-T_1(h) + 16T_1(\frac{h}{2})}{15}.$$

1°) Montrer que pour $k = 0$, 1 ou 2, on a :

$$T_k(h) - \int_0^1 f(t)dt = o(h^{2k+1})$$

lorsque h tend vers 0.

2°) Exprimer $T_2(h)$ en fonction de $\int_0^1 f(t)dt$ et de $r(h)$, $r\left(\frac{h}{2}\right)$ et $r\left(\frac{h}{4}\right)$.

En déduire la majoration :

$$\left|T_2(h) - \int_0^1 f(t)dt\right| \leq \frac{17}{9216} \cdot \frac{h^6}{\pi^6} \left\|f^{(6)}\right\|.$$

3°) On se propose d'appliquer la méthode décrite ci-dessus à la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ de façon à calculer une valeur approchée de $\ln 2 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$.

a) Montrer que $\left\|f^{(6)}\right\| = 720$.

b) Quelle valeur de n faut il prendre pour que $T_2(h)$ soit une approximation de ln 2 à la précision de 10^{-12} ?

N.B. : on supposera les erreurs d'arrondi négligeables.