NOTATIONS

Faites porter votre effort sur le III qui correspond au dernier chapitre

Soit V un espace vectoriel réel ; l'espace vectoriel des endomorphismes de l'espace vectoriel V est désigné par $L(V)$. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V ; l'endomorphisme noté f^k, où k est un entier naturel désigne l'endomorphisme unité Id_V si l'entier k est nul, l'endomorphisme obtenu en composant f k-fois avec lui-même si l'entier k est supérieur ou égal à 1 :

$$f^0 = Id_V \,;\, f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels ; étant donné un entier naturel n, soit E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n :

$$E = \mathbf{R}[X] \,;\, E_n = \mathbf{R}_n[X].$$

Soit D l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'. De même, soit D_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'.

L'objet du problème est de rechercher des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda\, Id_E + D$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E avec lui-même ; ainsi que des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda\, Id_{E_n} + D_n$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E_n avec lui-même.

Les troisième et quatrième parties peuvent être abordées indépendamment des première et deuxième parties ainsi que des préliminaires.

PRÉLIMINAIRES

Noyaux itérés :

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

a. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes f^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ est une suite de sous-espaces vectoriels de V emboitée croissante :

$$\ker f^0 \subset \ker f^1 \subset \ker f^2 \subset \ldots \subset \ker f^k \subset \ker f^{k+1} \subset \ldots$$

b. Démontrer que, s'il existe un entier p tel que les noyaux des endomorphismes f^p et f^{p+1} soient égaux $\left(\ker f^p = \ker f^{p+1}\right)$, pour tout entier q supérieur ou égal à p, les noyaux des endomorphismes f^q et f^{q+1} sont égaux $\left(\ker f^q = \ker f^{q+1}\right)$; en déduire la propriété suivante :

pour tout entier k supérieur ou égal à p, $\ker f^k = \ker f^p$.

En déduire que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n, la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang p inférieur ou égal à la dimension n $(p \leq n)$. En particulier les noyaux $\ker f^n$, $\ker f^{n+1}$ sont égaux.

c. Démontrer que, si l'endomorphisme u d'un espace vectoriel V de dimension finie n, est tel qu'il existe un entier q supérieur ou égal à 1 $(q \geq 1)$, pour lequel l'endomorphisme u^q est nul $(u^q = 0)$, l'endomorphisme u^n est nul $(u^n = 0)$.

L'endomorphisme u est dit nilpotent.

PREMIERE PARTIE

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple.

I-1. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g :
Soit λ un réel donné.

a. Étant donné un entier naturel n ($n \in \mathbf{N}$), soit p un entier naturel inférieur ou égal à l'entier n ($0 \leq p \leq n$). Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda \, Id_{E_n} + D_n,$$

l'endomorphisme g commute avec D_n :

$$g \circ D_n = D_n \circ g.$$

En remarquant que le sous-espace vectoriel $E_p = \mathbf{R}_p[X]$ est égal à $\ker(D_n)^{p+1}$, démontrer que E_p est stable par l'endomorphisme g de E_n ; soit g_p la restriction de l'endomorphisme g à E_p. Démontrer la relation :

$$(g_p)^2 = \lambda \, Id_{E_p} + D_p.$$

b. Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda \, Id_E + D,$$

l'endomorphisme g commute avec D :

$$g \circ D = D \circ g.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ est stable par l'endomorphisme g et que, si g_n est la restriction de l'endomorphisme g à E_n, il vient :

$$(g_n)^2 = \lambda \, Id_{E_n} + D_n.$$

c. Soit g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbf{R}[X]$ tel que :

$$g^2 = \lambda \, Id_E + D.$$

i/ Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E de dimension $n+1$ stable par l'endomorphisme D. Démontrer que l'endomorphisme D_F, restriction de D à F, est nilpotent.

En déduire que le sous-espace vectoriel F est égal à $E_n = \mathbf{R}_n[X]$. Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D.

ii/ Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par l'endomorphisme g, il faut et il suffit qu'il soit stable par D.

I-2. Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$:

a. À quelle condition nécessaire sur le réel λ existe-t-il un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_0 = \mathbf{R}_0[X]$ tel que

$$g^2 = \lambda \, Id_{E_0} + D_0 \ ?$$

b. Soit λ un réel strictement négatif ($\lambda < 0$), déduire des résultats précédents les deux propriétés :

. Il n'existe pas d'endomorphisme g de E tel que :

$$g^2 = \lambda \, Id_E + D.$$

. Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que :

$$g^2 = \lambda \, Id_{E_n} + D_n.$$

I-3. Une représentation matricielle simple de D_n :

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1, λ un réel.

Matrice A_λ : soit A_λ la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par les relations suivantes : ses coefficients a_{ij}, $i = 0, 1, \dots n$, $j = 0, 1, \dots, n$, sont définis par les relations :

$$a_{ii} = \lambda, \quad a_{i\,i+1} = 1, \quad a_{ij} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ ou si } j \neq i+1.$$

C'est-à-dire :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

a. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie $n+1$ tel que l'endomorphisme f^{n+1} soit nul sans que l'endomorphisme f^n le soit :

$$f^{n+1} = 0, \quad f^n \neq 0.$$

Démontrer qu'il existe un vecteur y de l'espace vectoriel V tel que la famille $B = \left(f^n(y), f^{n-1}(y), \dots, y\right)$ soit libre. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base B ?

b. En déduire qu'il existe une base B_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme D_n est la matrice A_0. Que vaut la matrice associée à l'application $\lambda\, Id_{E_n} + D_n$ dans cette base B_n ?

I-4. Un exemple :

Dans cette question l'entier n est égal à 2.

a. Démontrer que les seuls endomorphismes h de E_2 qui commutent avec l'endomorphisme D_2 sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en D_2 :

$$h = a\, Id_{E_2} + b\, D_2 + c\,(D_2)^2.$$

a, b, c sont trois réels.

b. En déduire qu'il existe des endomorphismes g de E_2 qui vérifient la relation suivante :

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_2} + D_2.$$

Déterminer les matrices carrées G d'ordre 3 qui vérifient la relation suivante :

$$G^2 = A_1.$$

DEUXIÈME PARTIE

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul. Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

II-1. Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$:

a. Montrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$, alors l'endomorphisme g est nilpotent et le noyau de l'endomorphisme g^2 a une dimension au moins égale à 2 ($\dim \ker g^2 \geq 2$).

b. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$.

c. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

Soit m un entier supérieur ou égal à 1 ($m \geq 1$) et k un entier supérieur ou égal à 2 ($k \geq 2$). Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$g^k = D^m.$$

a. Démontrer que les deux endomorphismes D et g sont surjectifs.

b. Démontrer que les sous-espaces vectoriels de E, $\ker g^q$ ont des dimensions finies lorsque l'entier q est inférieur ou égal à l'entier k ($0 \leq q \leq k$).

c. Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à k ($2 \leq p \leq k$). Soit Φ l'application définie dans l'espace vectoriel $\ker g^p$ par la relation :

$$\Phi : P \mapsto g(P).$$

Démontrer que cette application Φ est une application linéaire de $\ker g^p$ dans l'espace vectoriel $\ker g^{p-1}$. Quel est le noyau de l'application Φ ? Démontrer que l'application Φ est surjective ($\mathrm{Im}\,\Phi = Ker g^{p-1}$).

En déduire une relation entre les dimensions des sous-espaces vectoriels $\ker g^p$ et $\ker g^{p-1}$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\ker g^p$ en fonction de la dimension de l'espace vectoriel $\ker g$?

d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers k et m pour qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace vectoriel E tel que $g^k = D^m$. Retrouver le résultat de la question II-1.c.

TROISIÈME PARTIE

L'entier strictement positif n est supposé fixé. Dans cette partie, l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ est muni de la base B_n définie à la question I-3.b. La matrice associée à l'application I_{E_n} est la matrice I_{n+1} ; la matrice associée à l'endomorphisme D_n, est désignée par le même symbole D_n.

Étant donné un réel λ supposé strictement positif ($\lambda > 0$), soit L_n l'application de $\mathbf{R}$ dans l'espace des matrices carrées réelles d'ordre $n+1$, $M_{n+1}(\mathbf{R})$ qui, au réel t associe la matrice L_n définie par la relation suivante :

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} (D_n)^k.$$

La matrice $(D_n)^k$ est le produit k-fois avec elle-même de la matrice D_n.

III-1. Dérivée de l'application $t \mapsto (L_n(t))^k$:

a. Démontrer que, pour tout t réel, la matrice $I_{n+1} + t\,D_n$ est inversible et que son inverse, noté $(I_{n+1} + t\,D_n)^{-1}$, s'écrit sous la forme suivante :

$$(I_{n+1} + t\,D_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\,(D_n)^k.$$

Déterminer les fonctions $a_k : t \mapsto a_k(t)$ (bien sûr : $(D_n)^0 = I_{n+1}$).

b. Démontrer que l'application de $\mathbf{R}$ dans l'ensemble des matrices, réelles, carrées, d'ordre $n+1 : t \mapsto (I_{n+1} + t\,D_n)^{-1}$ est dérivable ; exprimer sa dérivée à l'aide des matrices $(I_{n+1} + t\,D_n)^{-1}$ et D_n.

c. Démontrer que, pour tout réel t, la matrice $L_n(t)$, élevée à la puissance $n+1$ est nulle :

$$(L_n(t))^{n+1} = 0.$$

d. Calculer la fonction dérivée $t \mapsto \frac{d}{dt}L_n(t)$ de la fonction $t \mapsto L_n(t)$ au moyen des matrices D_n et $(I_{n+1} + t\,D_n)^{-1}$.

Étant donné un entier naturel k donné, déduire des résultats précédents l'expression de la fonction dérivée $t \mapsto \frac{d}{dt}(L_n(t))^k$ de la fonction $t \mapsto (L_n(t))^k$ à l'aide de l'entier k et des matrices $L_n(t)$, D_n et $(I_{n+1} + t\,D_n)^{-1}$.

III-2. Matrice $\varphi_u(t)$:
Étant donné un réel u, soit $\varphi_u(t)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$\varphi_u(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} (L_n(t))^k.$$

a. Démontrer qu'étant donnés deux réels u et v le produit des matrices $\varphi_u(t)$ et $\varphi_v(t)$ est égal à la matrice $\varphi_{u+v}(t)$:

$$\varphi_u(t).\varphi_v(t) = \varphi_{u+v}(t).$$

b. Démontrer que la fonction $t \mapsto \varphi_u(t)$ est dérivable et que sa dérivée $\varphi_u{}'$ est définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\varphi_u{}'(t) = u\left(I_{n+1} + t\,D_n\right)^{-1}.D_n.\varphi_u(t).$$

c. Dans cette question le réel u est égal à 1 ; démontrer que la dérivée seconde de la fonction φ_1 est nulle : pour tout réel t, $\varphi_1{}''(t) = 0$. En déduire la relation :

$$\varphi_1(t) = I_{n+1} + t\,D_n.$$

III-3. Existence de l'endomorphisme g :
a. Soit λ un réel strictement positif ($\lambda > 0$) ; en utilisant les résultats de la question précédente et en remarquant la relation suivante

$$\lambda\,I_{n+1} + D_n = \lambda\left(I_{n+1} + \frac{1}{\lambda} D_n\right),$$

démontrer qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre $n+1$ telle que

$$M^2 = \lambda\,I_{n+1} + D_n.$$

Exprimer cette matrice M avec une matrice $\varphi_u(t)$. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E_n tel que :

$$g^2 = \lambda\,Id_{E_n} + D_n.$$

b. Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

QUATRIÈME PARTIE [Réservée 5/2]

IV-1. Un développement en série entière :
a. Soit h la fonction définie sur la demi-droite $[-1, \infty[$ par la relation :

$$h(x) = \sqrt{1+x}.$$

Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont une solution est cette fonction h.

b. En déduire qu'il existe un intervalle ouvert $]-R, R[$ dans lequel la fonction h est la somme d'une série entière de terme général $b_p\,x^p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Déterminer le rayon de convergence R et les coefficients b_p.

$$\text{pour tout réel } x \text{ appartenant à }]-R,R[,\ h(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p\,x^p.$$

c. Déterminer les valeurs des réels c_n, $n = 0, 1, 2, ...$ définis par la relation suivante :

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} b_p \, b_{n-p}.$$

IV-2 Existence d'un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda \, Id_E + D$ où λ est strictement positif :

Soit λ un réel strictement positif donné ($\lambda > 0$).

a. Soit T l'application définie dans $E = \mathbf{R}[X]$ par la relation :

$$\text{pour tout } P \text{ de } E, \; T(P) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p P.$$

Démontrer que T est un endomorphisme de E.

b. Calculer pour tout polynôme P de E son image par l'application composée $T \circ T = T^2$.

c. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E qui vérifie la relation suivante :

$$g^2 = \lambda \, Id_E + D.$$

d. En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un endomorphisme g_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ tel que la relation ci-dessous ait lieu :

$$(g_n)^2 = \lambda \, Id_{E_n} + D_n.$$

Exprimer l'endomorphisme g_n comme un polynôme de l'endomorphisme D_n. Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

FIN DU PROBLÈME