

**Notations**

On désigne par  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{C})$  l'ensemble des matrices à  $p$  lignes et  $q$  colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{C})$  on note  ${}^tA$  la matrice transposée de  $A$ ,  $\bar{A}$  la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice  $A$  et  $rg(A)$  le rang de  $A$ .

On fixe un entier  $n \geq 2$  et on considère  $V = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ ,  $E = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$  munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement  $0_V$  et  $0_E$ .

L'espace vectoriel  $V$  admet pour base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour  $(k, m) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  on pose  $E_{k,m} = e_k {}^t e_m$ , ce qui donne une matrice à  $n$  lignes et  $n$  colonnes dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  vaut 1 si  $(i, j) = (k, m)$  et 0 sinon. La base canonique de  $E$  est constituée des  $n^2$  matrices  $E_{k,m}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq m \leq n$ . On note  $I$  la matrice identité,  $I = \sum_{1 \leq k \leq n} E_{k,k}$ .

Si  $A$  est une matrice élément de  $E$  et  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ ,  $A(W)$  désigne l'ensemble  $\{Aw | w \in W\}$ .

Si  $F$  est un sous-ensemble de  $E$ , on dit que  $W$  est stable par  $F$  si

$$\forall A \in F, A(W) \subset W.$$

Pour tout sous-ensemble  $\mathcal{L}$  de  $E$  on s'intéresse aux propriétés suivantes :

$P_1$  :  $\mathcal{L}$  contient (au moins) une matrice de rang 1,

$P_2$  :  $\mathcal{L}$  contient (au moins) une matrice de rang  $n$ ,

$P_3$  :  $\mathcal{L}$  contient  $I$ ,

$P_4$  :  $\mathcal{L}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,

$P_5$  :  $\mathcal{L}$  est stable par produit de matrices :  $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow AB \in \mathcal{L}$ ,

$P_6$  : si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\mathcal{L}$ , alors soit  $W = \{0_V\}$  soit  $W = V$ .

**Partie I - Étude de quelques exemples**

**I.A** - Dans cette section I.A -,  $\mathcal{L}$  est l'ensemble des  $A \in E$  qui sont inversibles :

$$\mathcal{L} = GL_n(\mathbf{C}).$$

I.A.1) Soit  $x$  un vecteur non nul de  $V$ . Montrer que pour tout vecteur  $y$  non nul de  $V$  il existe une matrice inversible  $A$  telle que  $Ax = y$ .

Indication : on peut considérer deux cas,

a) la famille  $(x, y)$  est liée,

b) la famille  $(x, y)$  est libre.

En déduire que la propriété  $P_6$  est vérifiée par  $\mathcal{L}$ .

I.A.2) Indiquer celles des propriétés  $P_1, \dots, P_5$  qui sont vérifiées par  $\mathcal{L}$  ; justifier les réponses.

**I.B** - Dans cette section I.B -,  $\mathcal{L}$  est l'ensemble des matrices  $T = (t_{k,m}) \in E$  qui sont triangulaires inférieures, c'est-à-dire telles que

$$m > k \Rightarrow t_{k,m} = 0$$

I.B.1) Montrer que  $e_n$  est vecteur propre de tout  $T \in \mathcal{L}$ . Que peut-on dire de la propriété  $P_6$  pour  $\mathcal{L}$  ?

I.B.2) Indiquer celles des propriétés  $P_1, \dots, P_5$  qui sont vérifiées par  $\mathcal{L}$  ; justifier les réponses.

**I.C** - Dans cette section I.C -,  $n = 2$  et  $\mathcal{L}$  est un sous-ensemble de  $E$  pour lequel  $P_3$  et  $P_4$  sont vérifiées.

I.C.1) On suppose que  $P_1$  n'est pas vérifiée par  $\mathcal{L}$  (les matrices  $2 \times 2$  de rang 1 appartiennent donc toutes à  $E \setminus \mathcal{L}$  le complémentaire de  $\mathcal{L}$  dans  $E$ ). Soit  $A \in \mathcal{L}$  et  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Quelles sont les valeurs possibles du rang de  $A - \lambda I$  ? Montrer que  $\mathcal{L}$  est l'ensemble des homothéties vectorielles.

I.C.2) On suppose que  $P_6$  est vérifiée par  $\mathcal{L}$ . Montrer qu'alors la propriété  $P_1$  est vérifiée par  $\mathcal{L}$ .

Dans toute la suite du problème,  $P_4$  et  $P_5$  sont supposées vérifiées :  $\mathcal{L}$  est donc un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par produit matriciel.

**Partie II -**

Dans cette partie, les propriétés  $P_3$  et  $P_6$  sont supposées vérifiées par  $\mathcal{L}$  (en plus de  $P_4$  et  $P_5$ ). On veut montrer qu'alors  $P_1$  aussi est vérifiée.

On note

$$m = \min \{ \text{rg}(M) \mid M \in \mathcal{L} \setminus \{0_E\} \},$$

et on se propose de montrer que  $m = 1$ , ce qui établira  $P_1$ .

On suppose dans un premier temps que  $m \geq 2$ . On note alors  $M_0$  un élément de  $\mathcal{L}$  qui vérifie  $\text{rg}(M_0) = m$  et on considère une base  $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$  de  $M_0(V)$ . On note  $x_1, \dots, x_m$  des éléments de  $V$  tels que  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, M_0 x_i = z_i$ .

**II.A -** Montrer que  $\{Nz_1 \mid N \in \mathcal{L}\} = V$ .

On note alors  $N_0$  un élément de  $\mathcal{L}$  qui vérifie  $N_0 z_1 = x_2$  et on pose  $M_1 = M_0 N_0 M_0$ . Montrer que  $(M_0, M_1)$  est une famille libre.

**II.B -** Montrer que  $M_0(V)$  est stable par  $M_0 N_0$  puis que  $\exists(\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V)$ , tel que  $z \neq 0_V$  et  $M_0 N_0 z = \alpha z$ .

En déduire que  $0 < \text{rg}(M_1 - \alpha M_0) < \text{rg}(M_0)$ .

Conclure que  $m = 1$ .

**Partie III -**

Dans cette partie on suppose que  $n > 2$  et que la dimension de  $\mathcal{L}$  est supérieure ou égale à  $n^2 - 1$ . On veut montrer que  $P_3$  et  $P_6$  sont vérifiées, puis que  $\mathcal{L} = E$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de  $E$  stable par produit matriciel.

**III.A -** Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\mathcal{L}$ ; on note  $k$  la dimension de  $W$ . Montrer que  $\{M \in E \mid M(W) \subset W\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $\mathcal{L}$  et dont la dimension vaut  $n^2 - k(n - k)$ . En déduire que  $W = \{0_V\}$  ou  $W = V$ . On a donc démontré  $P_6$ .

**III.B -**

III.B.1) On suppose ici :  $(*) \exists k, m \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, k \neq m$  et  $E_{k,m} \in E \setminus \mathcal{L}$ .

On note alors  $\mathcal{H} = \text{Vect}(E_{k,m}, I)$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $E_{k,m}$  et  $I$ .

Montrer que  $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geq 1$  puis que  $\mathcal{L}$  contient une matrice inversible.

III.B.2) On suppose ici que c'est le contraire de  $(*)$  qui est vrai, donc

$$k \neq m \Rightarrow E_{k,m} \in \mathcal{L}.$$

Trouver une combinaison linéaire de ces  $E_{k,m}$  qui donne une matrice inversible.

En déduire que dans tous les cas  $\mathcal{L}$  contient une matrice inversible  $A$ .

**III.C -** Montrer que pour la matrice  $A$  définie ci-dessus, la famille  $(A, A^2, \dots, A^{n^2+1})$  est une famille liée.

En déduire qu'il existe un entier  $p > 0$  et des nombres complexes  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$  tels que  $\lambda_0 \lambda_p \neq 0$  et

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_p A^p = 0.$$

Montrer alors que  $I \in \mathcal{L}$ .

On a donc démontré  $P_3$ .

Compte tenu de la partie II -, la propriété  $P_1$  est donc satisfaite. On note alors

$M_0$  une matrice de rang 1 qui appartient à  $\mathcal{L}$ , matrice que l'on peut écrire

$$M_0 = v_0 {}^t \bar{w}_0, \text{ où } v_0, w_0 \in V \setminus \{0_V\}.$$

On introduit le produit scalaire canonique sur  $V$ ,  $(v, w) \mapsto {}^t \bar{v} w$  et pour  $v \in V$  on pose

$$A_v = \{Lv \mid L \in \mathcal{L}\},$$

$$B_v = \{{}^t \bar{L} v \mid L \in \mathcal{L}\},$$

$$C_v = (B_v)^\perp.$$

**III.D -** Soit  $u \in V, u \neq 0_V$ . Montrer que  $C_u$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\mathcal{L}$  et que  $B_u$  n'est pas réduit à  $\{0_V\}$ .

Montrer alors que  $C_u = \{0_V\}$  et  $B_u = V$ .

Montrer que  $A_u = V$ . En déduire que pour tout  $(x, y) \in V^2$  il existe  $L, M \in \mathcal{L}$  tels que  $Lv_0 = x$  et  ${}^t \bar{M} w_0 = y$ , puis que toute matrice  $A \in E$  de rang 1 appartient à  $\mathcal{L}$ . Montrer que  $\mathcal{L} = E$ .

••• FIN •••