
Filières PC,PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

Durée : 3 heures

Calculatrice interdite

Dans tout le problème n et p désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et \mathbf{K} désigne \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

- On note $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbf{K} .
- On identifiera \mathbf{K}^n et $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices colonnes d'ordre n à coefficients dans \mathbf{K} .
- Si M est une matrice, $m_{i,j}$ désigne le coefficient d'indice (i,j) de M et $C_j(M)$ désigne la j -ème colonne de cette matrice.
- Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, $rg(A)$ désigne le rang de A .
- On définit pour :

$$\bullet X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^n \text{ et } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^p, X \cdot Y = \begin{bmatrix} x_1 Y \\ \vdots \\ x_n Y \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{np};$$

- $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$, $A * B$ la matrice carrée d'ordre np , dont la représentation par blocs carrés d'ordre p est :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \cdots & a_{n,n}B \end{bmatrix}$$

Par exemple si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ alors $A * B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, on note $Sp_{\mathbf{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à \mathbf{K} i.e. l'ensemble des racines dans \mathbf{K} du polynôme caractéristique de A .
- Si u_1, \dots, u_p sont des vecteurs d'un \mathbf{K} espace vectoriel E , on note $\text{Vect}_{\mathbf{K}}(u_1, \dots, u_p)$ le sous espace vectoriel de E engendré par la famille (u_1, \dots, u_p) .
- Si X est une matrice colonne, \overline{X} désigne la matrice colonne dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de X .

Tournez la page S.V.P.

Partie I

1. Montrer que : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K}), \forall B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K}), A * B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
2. a. Montrer que : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K}), \forall B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K}), \forall X \in \mathbf{K}^n, \forall Y \in \mathbf{K}^p$,
 $(A * B) * (X * Y) = (A * X) * (B * Y)$.
 b. De même, montrer que : $\forall (A, A') \in (\mathbf{M}_n(\mathbf{K}))^2, \forall (B, B') \in (\mathbf{M}_p(\mathbf{K}))^2$,
 $(A * B) * (A' * B') = (A * A') * (B * B')$.
3. Montrer que : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K}), \forall B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K}), A * B$ est nilpotente si et seulement si A ou B l'est.
4. a. On suppose que $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$ sont inversibles. Montrer que $A * B$ est inversible et préciser son inverse en fonction de A^{-1} et B^{-1} .

b. Montrer que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

5. On note $J_n(r)$ la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux qui valent 1.
 - a. Montrer que $rg[(J_n(r)) * (J_p(s))] = rs$.
 - b. On suppose que $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ et $rg(A) = r$, et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K}), rg(B) = s$.
Montrer que $rg(A * B) = rs$.
 - c. En déduire que $A * B$ inversible implique A et B inversibles.

6. On note (U_1, \dots, U_n) la base canonique de \mathbf{K}^n et (V_1, \dots, V_p) la base canonique de \mathbf{K}^p .
 - a. Montrer que $B = (U_1 * V_1, \dots, U_1 * V_p, \dots, U_n * V_1, \dots, U_n * V_p)$ est la base canonique de \mathbf{K}^{np}
 - b. Etablir que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}$

$$(A * B)(U_i * V_j) = \sum_{l=1}^p b_{l,j} \left(\sum_{k=1}^n a_{k,i} (U_k * V_l) \right).$$

En déduire la matrice associée à $A * B$ dans la base $B' = (U_1 * V_1, \dots, U_n * V_1, \dots, U_1 * V_p, \dots, U_n * V_p)$.

- c. Montrer qu'il existe une matrice carrée P d'ordre np , orthogonale, telle que :

$$B * A = {}^t P (A * B) P.$$

Partie II

On considère 2 matrices carrées, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$.

1. a. On considère X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ et Y un vecteur propre de B pour la valeur propre μ . Montrer que $\lambda\mu$ est une valeur propre de $A * B$ et préciser un vecteur propre associé à cette valeur propre.
 b. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $A * B$ est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propre de $A * B$ en fonctions d'une base de vecteurs propres de A et d'une base de vecteurs propres de B .

c. *exemple* : montrer que $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous

espaces propres.

2. On suppose dans cette question que $A \star B$ est diagonalisable et que $Sp_{\mathbf{K}}(A)$ contient une valeur non nulle.
 - Soit $\lambda \in Sp_{\mathbf{K}}(A)$ et U un vecteur propre pour la valeur propre λ .
 - On note $U \star \mathbf{K}^p$ le sous espace vectoriel de \mathbf{K}^{np} formé des vecteurs de la forme $U \star Y$ pour $Y \in \mathbf{K}^p$.
 - a. Montrer que $U \star \mathbf{K}^p$ est un sous espace vectoriel de \mathbf{K}^{np} stable par $A \star B$.
 - b. En choisissant λ convenablement, en déduire que B est diagonalisable.

On suppose désormais que $A \star B$ est diagonalisable et non nulle.

3. On suppose dans cette question que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que l'on a alors A et B diagonalisables.

**On suppose désormais que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $A \in M_n(\mathbf{R})$, $B \in M_p(\mathbf{R})$.
On rappelle que $M_n(\mathbf{R})$ est naturellement inclus dans $M_n(\mathbf{C})$.**

4. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est diagonalisable alors l'autre l'est aussi.
5. On suppose dans cette question que A et B ne sont pas diagonalisables.
 - on note, S la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et si p est un entier naturel non nul, 0_p la matrice nulle carrée d'ordre p .
 - a. Montrer que toute valeur propre complexe non nulle de A ou de B n'appartient pas à \mathbf{R} .
 - b. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbf{C}}(A)$ et $\mu \in Sp_{\mathbf{C}}(B)$ non nulles. Montrer que $\lambda\mu \in \mathbf{R}$ et $\lambda\bar{\mu} \in \mathbf{R}$. En déduire que λ^2 et μ^2 sont des nombres réels.
 - c. Soit $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $i\alpha \in Sp_{\mathbf{C}}(A)$ et X un vecteur propre associé. Montrer que $\text{Vect}_{\mathbf{R}}[(X + \bar{X}), i(X - \bar{X})]$ est un sous espace vectoriel de \mathbf{R}^n stable par A . Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit par A dans la base $((X + \bar{X}), i(X - \bar{X}))$ de $\text{Vect}_{\mathbf{R}}[(X + \bar{X}), i(X - \bar{X})]$?
 - d. Montrer qu'il existe un couple d'entiers naturels non nuls (r, s) et $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in]0, +\infty[^r$, $(\beta_1, \dots, \beta_s) \in]0, +\infty[^s$ tels que :

$$A \text{ est semblable à } \begin{bmatrix} \alpha_1 S & & & \\ & \ddots & & \\ & & (0) & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & & \alpha_r S \\ & & & & & 0_{n-2r} \end{bmatrix} \text{ et } B \text{ semblable à } \begin{bmatrix} \beta_1 S & & & \\ & \ddots & & \\ & & (0) & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & & \beta_s S \\ & & & & & 0_{p-2s} \end{bmatrix}.$$

En déduire que A et B sont semblables à des matrices antisymétriques.

6. Montrer que : $\forall M \in M_n(\mathbf{R}), \forall N \in M_p(\mathbf{R}), {}^t(M \star N) = ({}^t M) \star ({}^t N)$.
7. On suppose que M et N sont des matrices carrées à coefficients réels, non nulles, semblables à des matrices antisymétriques.
 - a. Montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables (on pourra montrer qu'elles ne possèdent pas de valeurs propres non nulles)
 - b. Etablir que $M \star N$ est diagonalisable.