E.P.I.T.A. 2000
Mathématiques (Obligatoire : durée 3h)

1°) Préliminaire : calcul d'une intégrale
On considère dans cette question les deux fonctions G et H définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x)=\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2}du \quad ; \quad H(x)=\left(\int_0^x \exp(-u^2)du\right)^2.$$

a) Montrer que G et H sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (en précisant les résultats utilisés) et préciser les dérivées G' et H'. En déduire que la fonction $G+H$ est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $\pi/4$.
b) Montrer l'inégalité suivante pour tout nombre réel x :

$$0 \le G(x)=\exp(-x^2)\int_0^1 \frac{\exp(-x^2u^2)du}{1+u^2} \le \frac{\pi}{4}\exp(-x^2).$$

En déduire la limite de $G(x)$, puis de $H(x)$, quand x tend vers $+\infty$, puis déterminer l'intégrale I définie par :

$$I=\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du.$$

***

Dans toute la suite du problème, on désigne par f une fonction à valeurs complexes continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et on étudie la fonction F (dite transformée de Fourier de f) définie par :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt.$$

2°) Premières propriétés de la transformée de Fourier F de f
a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ (on citera le théorème utilisé).
c) Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

3°) Un premier exemple : la transformée de Fourier de la fonction $f : t \to 1/(1+t^2)$
On suppose dans cette question, *et dans cette question seulement*, que $f(t) = 1/(1+t^2)$. Ainsi :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2i\pi xt}}{1+t^2}dt.$$

a) Etablir à l'aide d'une intégration par parties la relation suivante pour tout nombre réel x :

$$(1) \qquad \pi x F(x)=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^{-2i\pi ux}dt}{(1+t^2)^2}.$$

En déduire que $|F(x)| \le \dfrac{1}{\pi|x|}$ pour tout nombre réel x et déterminer la limite de F en $\pm\infty$.
b) Etablir que l'intégrale figurant au membre de droite de l'égalité (1) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée (on citera le théorème utilisé et on vérifiera ses hypothèses). En déduire que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et montrer par dérivation de la relation (1) que :

$$(2) \qquad F(x)-xF'(x)=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2i\pi ux}dt}{(1+t^2)^2} \quad (\text{où } x\neq 0).$$

c) Etablir à l'aide de la relation (2) que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$, puis former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par F sur $\mathbb{R}^*$.
d) Calculer $F(0)$ et, en tenant compte des limites de F en $\pm\infty$, en déduire l'expression de $F(x)$ (on pourra distinguer les deux cas $x \ge 0$ et $x \le 0$).

4°) Dérivée de la transformée de Fourier et transformée de Fourier de la dérivée

a) On suppose dans cette sous-question que la fonction $t \to tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée (on citera le théorème utilisé).
Comment généraliser ce résultat aux dérivées successives de F?

b) On suppose dans cette sous-question que f est de classe C^1 et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f tend vers 0 en $\pm\infty$ et déterminer la transformée de Fourier de f'.
Comment généraliser ce résultat aux dérivées successives de f?

5°) Un deuxième exemple : la transformée de Fourier de la fonction $f : t \to \exp(-\pi t^2)$

On suppose dans cette question, *et dans cette question seulement*, que $f(t) = \exp(-\pi t^2)$. Ainsi :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} \exp(-\pi t^2)dt.$$

On se propose d'utiliser les résultats précédents pour obtenir la transformée de Fourier $F(x)$.

a) En déterminant les transformées de Fourier des deux membres de la relation $f'(t) = -2\pi t f(t)$, déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par F.

b) Calculer $F(0)$ à l'aide du résultat de la question 1°, puis en déduire l'expression de $F(x)$.

6°) Limites en $\pm\infty$ de la transformée de Fourier F de f

On établit dans cette question que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

a) On considère une subdivision d'un segment $[-A, A]$ notée $-A = a_0 < a_1 < \ldots < a_{p-1} < a_p = A$ et une fonction en escalier ϕ définie sur $[-A, A]$ par $\phi(t) = \phi_k$ si $a_{k-1} < t < a_k$ $(1 \leq k \leq p)$.
Calculer alors l'intégrale suivante, puis déterminer sa limite quand x tend vers $\pm\infty$:

$$\int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi xt}\phi(t)dt.$$

b) Etablir qu'il existe un nombre réel positif A tel qu'on ait pour tout nombre réel x :

$$|F(x) - \int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi xt} f(t)dt| \leq \varepsilon.$$

c) Justifier l'existence d'une fonction ϕ en escalier sur $[-A, A]$ telle qu'on ait pour $-A \leq x \leq A$:

$$|f(x) - \phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2A}.$$

d) Déduire des résultats précédents que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

7°) Continuité de la transformation de Fourier

On munit l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ de la norme N_1 définie pour une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ par :

$$N_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt.$$

On munit l'espace vectoriel $C_b(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et bornées sur $\mathbb{R}$ de la norme N_∞ définie pour une fonction f de $C_b(\mathbb{R})$ par :

$$N_\infty(f) = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|.$$

a) Montrer que la transformation de Fourier (qu'on notera T) réalise une application linéaire continue de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ muni de la norme N_1 dans l'espace $C_b(\mathbb{R})$ muni de la norme N_∞.

b) Déterminer la norme subordonnée de cette application linéaire, égale par définition à :

$$\| T \| = \sup\{ \frac{N_\infty(Tf)}{N_1(f)} \,/\, f \in L^1(\mathbb{R}), f \neq 0 \}.$$

***